ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

UNTER MITWIRKUNG VON K. BEYER VDI, G. HAMEL VDI, L. PRANDTL VDI UND C. WEBER. HERAUSGEGEBEN VON FR. A. WILLERS, DRESDEN

:: Band 19 :: Seite 193 bis 256

:: Heft 4 :: August 1939

INHALT:



VDI-VERLAG G.M.B.H., BERLIN NW 7

Englisch-französische Titelerläuterungen der in Band XIX, Heft 4 der „ZAMM" (1939) veröffentlichten Hauptaufsätze.

W. Müller in Aachen.

On the problem of the longitudinal motion of an aeroplane. Referring to his former investigations the author shows in this article that the differential equations for the motion of the centre of gravity of an aeroplane moving without driving force can be formally integrated. For this purpose he makes use of a mean gliding ratio; besides he introduces the „Bahnfrequenz" — i. e. the product of the velocity and a quantity proportional to the lift coefficient — as a function of time. Velocity and path coordinates may be written generally as complex expressions. Particularly the author deals with the three cases that the „Bahnfrequenz" keeps a constant value or diminishes with time in a hyperbolical or linear manner. The last assumption leads to Fresnel integrals. Finally the author applies his theory to the calculation of looping paths.

Sur le problème du mouvement longitudinal d'un avion. En se rapportant à ses travaux précédents l'auteur démontre dans le présent mémoire la possibilité d'intégrer les équations différentielles du mouvement du centre de gravité d'un avion volant sans force motrice. Pour cela il introduit un coefficient moyen de planement; en outre il suppose pour la „Bahnfrequenz", à savoir le produit de la vitesse multipliée par une certaine quantité proportionelle au coefficient de portance soit une fonction du temps. Alors la vitesse et les coordonnées de la trajectoire peuvent être représentées par des expressions complexes. En particulier l'auteur traite les trois cas que la „Bahnfrequenz" reste constante, ou diminue avec le temps de façon hyperbolique ou linéaire. Cette dernière supposition donnée on est conduit à des intégrales de Fresnel. L'auteur finit par appliquer sa méthode au calcul des trajectoires du looping.

T. H. Havelock in Newcastle-on-Tyne.

Note on the sinkage of a ship at low speeds. In order to obtain the sinkage of a ship at low speeds, the author takes for the immersed portion of the ship a semi-ellipsoid, the xy-plane being the water-surface. Further the sinkage is assumed to be due to stream line fluid motion round the submerged part of the model, neglecting the disturbance of the water-surface. Then an exact expression may be found for the total defect of vertical pressure and hence for a certain equivalent sinkage. The numerical results of this method are found to be sufficiently in accordance with the results obtained from an empirical formula given by Horn.

Sur le tirant d'eau d'un navire se mouvant à petite vitesse. Pour calculer l'augmentation du tirant d'eau, l'auteur remplace la partie immergeante du navire par un demi-ellipsoïde dont la surface limite plane coincide avec la superficie d'eau. En supposant un écoulement potentiel autour de ce corps-là tel que la superficie d'eau reste plane, on peut calculer la diminution de la pression et, de là, l'augmentation du tirant d'eau. Les résultats numériques ainsi obtenus s'accordent suffisamment avec ceux obtenus à l'aide d'une formule due à Horn.

Fr. A. Willers in Dresden.

The buckling strength of circular plates gradually reinforced. From the expression for the potential energy of a buckling circular plate reinforced by degrees, the author deduces the differential equation of the deformation, the transition conditions on the circular arcs of the reinforcing plates and the boundary conditions both for the fixed and for the rotating plate. In particular the author studies the case of a plate only once graduated and reinforced to the double amount.

Sur les charges de flambage des plaques circulaires renforcées graduellement. En partant de l'expression pour l'énergie potentielle d'une plaque circulaire renforcée par une série de plaques et flambée l'auteur déduit l'équation différentielle de la déformation, les conditions de passage aux endroits de discontenuité et enfin les conditions au limites dans les deux cas que la plaque est encastrée ou que le bord de la plaque est immobilisé sans être encastré. D'une manière détaillée l'auteur examine l'effet d'un renforcement au double d'une plaque graduée une seule fois.

H. Seitter in Wien.

On the small oscillations of a considerably sagging rope. In this paper the author investigates the symmetrical natural oscillations of a flexible and considerably sagging rope fixed to two supports situated in a horizontal line. Further he discusses the difference between such a rope and a rope strongly stretched and hence little sagging; essential differences are shown to be already in the fundamental suppositions. For the solution of the problem of continual perpendicular loads the author gives an exact proceeding. Finally he treats in full the special case of a homogeneous rope.

Sur les petites oscillations d'un câble fortement fléchissant. L'auteur étudie les oscillations propres symétriques d'un câble flexible attaché à deux paliers situés dans une horizontale et fortement fléchissant. Il compare ce cas avec celui d'un câble fortement tendu et, par conséquent, peu fléchissant et en indique les différences; en outre il montre que les différences essentielles se présentent déjà dans les suppositions fondamentales. Pour des charges verticales continues quelconques, l'auteur donne une méthode exacte de traitement; pour le cas d'un câble homogène il pousse le calcul jusqu'au bout.

G. Heinrich in Wien.

Resonance oscillations of a system in the case of vectorial superposition of the exciting impulses. Referring to a case of transversal flywheel oscillations the author develops the resonance conditions of a system that may execute tautochronous oscillations around all axes situated in the same plane. The excitation results from periodically varying shocks the vectors of which turn with constant angular velocity in the plain determined by the swinging axes. The author discusses both discreet single shocks and continuously varying infinitesimal ones, and deals with the resonance cases of undamped and damped systems.

Oscillations de résonance d'un système dans le cas d'une superposition vectorielle des impulsions excitantes. En se rapportant à un cas de vibrations transversales d'un volant, l'auteur recherche les conditions de résonance pour un système exécutant des oscillations tautochrones autour de tous les axes possibles dans le même plan. L'excitation résulte de chocs à variation périodique dont les vecteurs tournent avec une vitesse angulaire constante dans le plan déterminé par les axes oscillants. L'auteur suppose 1° des chocs finis et séparés, 2° des chocs infiniment petits et changeant continûment. Les phénomènes de résonance sont traités pour les systèmes non-amortis ainsi que pour les systèmes amortis.

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 19 | August 1939 | Heft 4

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Zum Problem der Längsbewegung eines Flugzeugs.

Von *Wilhelm Müller* in Aachen.

1. Eine allgemeine Form des Integrationsproblems. Die früher[1]) veröffentlichten Untersuchungen zur Frage der Längsbewegung eines Flugzeugs unter verschiedenen Bedingungen möchte ich in der vorliegenden Arbeit weiter ergänzen und vervollständigen. Dabei werde ich insbesondere Gelegenheit nehmen, den Formeln durch Verwendung komplexer Größen eine elegantere und übersichtlichere Gestalt zu geben, und im Anschluß daran einen weiteren mathematisch interessanten Spezialfall durchzurechnen, der auf Fresnelsche Integrale führt.

Die Bewegung des Schwerpunktes eines Flugzeugs in einer Vertikalebene ist durch ein System zweier Gleichungen für die tangentiale und normale Beschleunigung gekennzeichnet. Wenn man durch die Masse $\frac{G}{g}$ dividiert und an Stelle der Luftkraft-Beiwerte c_a und c_w die damit verhältnisgleichen Größen

$$k_a = c_a \cdot \frac{\gamma}{2}\frac{F}{G}; \qquad k_w = c_w \cdot \frac{\gamma}{2}\frac{F}{G},$$

wo γ das spezifische Luftgewicht und $G:F$ die Flächenbelastung bedeutet, ferner den Winkel φ zwischen Bahntangente und Waagerechten einführt, so haben die Gleichungen folgende Gestalt:

$$\frac{dv}{dt} = -g\sin\varphi - k_w v^2, \qquad v\frac{d\varphi}{dt} = k_a v^2 - g\cos\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Transformiert man dagegen auf rechtwinklige Koordinaten und führt die mittlere Gleitzahl ε ein, so erhält man

$$\ddot{x} = -v \cdot k_a(\varepsilon\dot{x} + \dot{y}), \qquad \ddot{y} = -g - v \cdot k_a(\varepsilon\dot{y} - \dot{x}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Das spezielle Integrationsproblem bezieht sich auf eine vorgegebene Abhängigkeit der Beiwerte c_a und c_w, bzw. der Größen k_a und k_w von der Zeit. Für die mathematische Behandlung ist es dagegen vorteilhaft, wie ich an anderer Stelle ausgeführt habe, das Produkt $v \cdot k_a$ als Funktion $f(t)$ von t darzustellen und dann nachträglich aus der durch Integration berechen-

[1]) Vgl. Wilhelm Müller: Ing.-Arch. Bd. 9 (1938) S. 258; ferner Ing.-Arch. Bd. 10 (1939) S. 63.

baren Geschwindigkeit die Funktion $k_a = \frac{f(t)}{v}$ zu ermitteln. Die Gleichungen gehen mit Einführung der Funktion $f(t)$ über in

$$\ddot{x} = -f(t)(\varepsilon\,\dot{x} + \dot{y}), \qquad \ddot{y} = -g - f(t)(\varepsilon\,\dot{y} - \dot{x}) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3).$$

Differenziert man nun noch einmal nach der Zeit, so kommt

$$\dddot{x} = -f(t)(\varepsilon\,\ddot{x} + \ddot{y}) - \dot{f}(t)(\varepsilon\,\dot{x} + \dot{y}), \qquad \dddot{y} = -f(t)(\varepsilon\,\ddot{y} - \ddot{x}) - \dot{f}(t)(\varepsilon\,\dot{y} - \dot{x}).$$

Durch Elimination von y ergibt sich z. B. die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon f & \varepsilon \dot{f} & -(f\ddot{x} + \dot{f}\dot{x}) \\ 0 & 1 & \varepsilon f & -f\dot{x} + g \\ 0 & f & \dot{f} & \dddot{x} + \varepsilon f \ddot{x} + \varepsilon \dot{f}\dot{x} \\ 0 & 0 & f & \ddot{x} + \varepsilon f \dot{x} \end{vmatrix} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

oder

$$\dddot{x} + \left(2\,\varepsilon f - \frac{\dot{f}}{f}\right)\ddot{x} + (1 + \varepsilon^2) f^2 \cdot \dot{x} = g f \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4\,\text{a}).$$

In ähnlicher Weise erhält man durch Elimination von x und seinen Ableitungen

$$\dddot{y} + \left(2\,\varepsilon f - \frac{\dot{f}}{f}\right)\ddot{y} + (1 + \varepsilon^2) f^2 \cdot \dot{y} = -g\left(\varepsilon f - \frac{\dot{f}}{f}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5).$$

Die homogenen Bestandteile der beiden für $\dot{x}$ und $\dot{y}$ geltenden Differentialgleichungen stimmen überein. Für die Weiterbehandlung kommt es zunächst auf die Lösung der homogenen Gleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{p} + \left(2\,\varepsilon f - \frac{\dot{f}}{f}\right)\dot{p} + (1 + \varepsilon^2) f^2 \cdot p = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

an. Setzt man

$$f(t) = \frac{d\,F(t)}{d\,t}; \qquad F = \int f(t)\,d\,t,$$

so sind zwei linear unabhängige Sonderintegrale von (6)

$$p_1 = e^{-\varepsilon F(t)} \cdot \cos F(t); \qquad p_2 = e^{-\varepsilon F(t)} \cdot \sin F(t).$$

Damit erhält man aber die allgemeine Lösung der inhomogenen Gl. (4) für $\dot{x}$ in der Form

$$\dot{x} = c_1(t)\,p_1 + c_2(t)\,p_2,$$

wo

$$c_1(t) = g\int^t \frac{f(t)\,p_2\,d\,t}{p_2\dot{p}_1 - p_1\dot{p}_2}; \qquad c_2(t) = g\int^t \frac{f(t)\,p_1\,d\,t}{p_1\dot{p}_2 - p_2\dot{p}_1}$$

zu setzen ist. Wegen

$$\dot{p}_1 = -\dot{F}\,e^{-\varepsilon F}(\sin F + \varepsilon\cos F); \qquad \dot{p}_2 = \dot{F}\,e^{-\varepsilon F}(\cos F - \varepsilon \sin F);$$

$$p_1\dot{p}_2 - p_2\dot{p}_1 = \frac{d\,F}{d\,t}\,e^{-2\varepsilon F} = f(t)\,e^{-2\varepsilon F(t)}$$

erhalten wir daher

$$\dot{x} = v_x = g\,[e^{-\varepsilon F}\sin F \cdot \int e^{\varepsilon F}\cos F\,d\,t - e^{-\varepsilon F}\cos F \cdot \int e^{\varepsilon F}\sin F\,d\,t] \quad . \; . \; . \; . \quad (7),$$

und man sieht, daß in dieser Form bei Berücksichtigung der Integrationskonstanten auch das allgemeine Integral der homogenen Gleichung enthalten ist.

Ebenso ergibt sich die andere Koordinate Geschwindigkeitskomponente $\dot{y}$ zunächst in der Form

$$\dot{y} = g\left[p_2\int\left(\frac{\dot{f}}{f^2} - \varepsilon\right)e^{\varepsilon F}\cos F\,d\,t - p_1\int\left(\frac{\dot{f}}{f^2} - \varepsilon\right)e^{\varepsilon F}\sin F\,d\,t\right].$$

Die weitere Umgestaltung geschieht durch partielle Integration. Man erhält

$$\int\frac{\dot{f}}{f^2}\,e^{\varepsilon F}\cos F\,d\,t = -\int d\left(\frac{1}{f}\right)e^{\varepsilon F}\cos F = -\frac{1}{f}\,e^{\varepsilon F}\cos F + \varepsilon\int e^{\varepsilon F}\cos F\,d\,t - \int e^{\varepsilon F}\sin F\,d\,t.$$

Ebenso

$$\int \frac{\dot{f}}{f^2} e^{\varepsilon F} \sin F \, d t = -\frac{1}{f} e^{\varepsilon F} \sin F + \varepsilon \int e^{\varepsilon F} \sin F \, d t + \int e^{\varepsilon F} \cos F \, d t .$$

Damit geht der Ausdruck für $\dot{y}$ über in den folgenden

$$\dot{y} = v_y = -g \left[e^{-\varepsilon F} \cos F \int e^{\varepsilon F} \cos F \, d t + e^{-\varepsilon F} \sin F \int e^{\varepsilon F} \sin F \, d t \right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8),$$

der dem Ausdruck für $\dot{x}$ analog gebaut ist. Auf diese Weise sind auch die Koordinaten eines Punktes der Flugbahn auf eine Folge von Quadraturen zurückgeführt. Es liegt nun nahe und erweist sich auch als zweckmäßig für die Rechnung, komplexe Geschwindigkeiten und Koordinaten einzuführen. Multiplizieren wir also $\dot{y}$ mit der imaginären Einheit i und addieren $\dot{x}$, so ergibt sich für $\dot{x} + i \dot{y}$ der stark zusammengezogene Ausdruck

$$v_x + i v_y = -i g \, e^{(i-\varepsilon) F(t)} \int^t e^{(\varepsilon - i) F(t)} \, d t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Durch eine weitere Integration findet man für die komplexe Koordinate eines Bahnpunktes

$$x + i y = -i g \int^t \left[e^{(i-\varepsilon) F(t)} \cdot \int e^{(\varepsilon - i) F(t)} \, d t \right] d t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

In diesen Darstellungen sind alle möglichen Flugbahnen enthalten, die einer konstanten mittleren Gleitzahl entsprechen. Wir wollen nun einige bemerkenswerte Sonderfälle besprechen.

2. Der Fall konstanter „Bahnfrequenz". Es gibt wenig Fälle, die eine einfach zu übersehende und für die Zahlenrechnung geeignete Integration zulassen. Unter diesen ist namentlich der Fall hervorzuheben, daß f einen konstanten Wert $f = v \cdot k_a = b =$ konst. annimmt. Dann ist die Integration sofort ausführbar mit Hilfe der Formeln

$$\int^t e^{\varepsilon b t} \cos b t \, d t = \frac{e^{\varepsilon b t} (\sin b t + \varepsilon \cos b t)}{b (1 + \varepsilon^2)} ; \qquad \int^t e^{\varepsilon b t} \sin b t = \frac{e^{\varepsilon b t} (\varepsilon \sin b t - \cos b t)}{b (1 + \varepsilon^2)} \qquad (11).$$

Zunächst erhalten wir in komplexer Schreibweise

$$v_x + i v_y = (A' - i B') e^{-\varepsilon b t} (\cos b t + i \sin b t) + D_1 + i D_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12),$$

$$x + i y = (A - i B) e^{-\varepsilon b t} (\cos b t + i \sin b t) + C_1 + i C_2 + (D_1 + i D_2) t \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Wenn man z. B. verlangt, daß für $t = 0$, $x = y = 0$, ferner $\dot{x} = v_{0x}$, $\dot{y} = v_{0y}$ wird, so erhalten die auftretenden Konstanten die Werte[2])

$$\left. \begin{aligned} A' &= v_{0x} - D_1 = v_{0x} - \frac{g}{b (1 + \varepsilon^2)} ; & B' &= -v_{0y} + D_2 = -v_{0y} - \frac{\varepsilon g}{b (1 + \varepsilon^2)} \\ A &= -C_1 = \frac{2 \varepsilon g + b (1 + \varepsilon^2) (v_{0y} - \varepsilon v_{0x})}{b^2 (1 + \varepsilon^2)^2} ; & B &= C_2 = \frac{b (1 + \varepsilon^2) (v_{0x} + \varepsilon v_{0y}) - g (1 - \varepsilon^2)}{b^2 (1 + \varepsilon^2)^2} \end{aligned} \right\} \quad (14).$$

Die durch (12), (13) dargestellte Flugbewegung läßt sich zusammensetzen aus einem gedämpft periodischen Teil, der namentlich zu Beginn der Bewegung entscheidend ist und einer geradlinigen Gleitbewegung, die nach Abklingen der Schwingung als stationärer Endzustand übrigbleibt. Die Größe b — dimensionsmäßig eine Winkelgeschwindigkeit —, die Wellenlänge und Schwingungsdauer bestimmt, wird zweckmäßigerweise als Bahnfrequenz bezeichnet. Auch wenn b nicht mehr konstant ist, wird durch ihren Momentanwert der Charakter der Bahn gekennzeichnet. In bezug auf die genauere Diskussion und Unterscheidung der wichtigsten, mit dem Ansatz erfaßten Bahntypen verweise ich auf meine letzte im Ingenieur-Archiv erschienene Arbeit.

Um das Änderungsgesetz für den Beiwert c_a bzw. der Größe k_a zu erhalten, benötigen wir noch den Ausdruck für die Bahngeschwindigkeit. Aus den etwa für $v_{0y} = 0$ geltenden Komponenten-Ausdrücken

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_0 + \left(\frac{g}{b (1 + \varepsilon^2)} - v_0 \right) (1 - e^{-\varepsilon b t} \cos b t) - \frac{\varepsilon g \, e^{-\varepsilon b t}}{b (1 + \varepsilon^2)} \sin b t \\ v_y &= -\frac{\varepsilon g}{b (1 + \varepsilon^2)} (1 - e^{-\varepsilon b t} \cos b t) + \left(v_0 - \frac{g}{b (1 + \varepsilon^2)} \right) e^{-\varepsilon b t} \sin b t \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

ergibt sich nach entsprechender Zusammenfassung

[2]) Vgl. Wilhelm Müller: Ing.-Arch. Bd. 10 (1939) S. 73.

$$v^2 = v_0^{\,2}\, e^{-2\varepsilon b t} + \frac{2 g\, e^{-\varepsilon b t}}{b(1+\varepsilon^2)} \left[\frac{g}{b}\,(\mathfrak{Cof}\ \varepsilon b t - \cos b t) + v_0\,(\cos b t - \varepsilon \sin b t - e^{-\varepsilon b t})\right] \qquad (16).$$

Man sieht daraus übrigens, daß nach theoretisch unendlich langer Zeit die Geschwindigkeit den Grenzwert

$$v_e = \frac{g}{b\sqrt{1+\varepsilon^2}} = \frac{g}{b}\cos\psi$$

erreicht und zwar auf einer geraden Gleitbahn, die den Winkel $\psi = -\operatorname{arc\,tg}\varepsilon$ mit der Waagerechten bildet. Die Größe k_a und damit c_a verhält sich bei konstantem b umgekehrt proportional mit der Geschwindigkeit und hat daher wie diese einen gedämpft-periodischen Verlauf. Der entsprechende Differentialquotient nach der Zeit ergibt sich am einfachsten aus der Energiegleichung, die für unseren Fall die Form annimmt:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2 + g y\right) = -\varepsilon b v^2;$$

mit $v = \dfrac{b}{k_a}$ kommt

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{b^2}{k_a^{\,2}} + g y\right) = -\varepsilon \frac{b^3}{k_a^{\,2}}$$

oder

$$\dot{k}_a - \varepsilon b \cdot k_a = \frac{g \cdot k_a^{\,3}}{b^2} \cdot v_y \qquad (17).$$

Wenn man schließlich für v_y den oben ermittelten Wert einträgt, erhält man die Differentialgleichung für den Auftriebsbeiwert.

3. Der Fall hyperbolischer Abhängigkeit der Bahnfrequenz von der Zeit. Die Integration (9) bzw. (10) ist für den gut anwendbaren Fall

$$f = \frac{c}{t + t_0}$$

unmittelbar ausführbar. Man erhält, wie man leicht feststellt, mit

$$F = c \ln \frac{t + t_0}{t_0}$$

für Geschwindigkeit und Koordinate Ausdrücke von folgender Art:

$$\left.\begin{aligned} v_x + i v_y &= (A' - i B')\left(1 + \frac{t}{t_0}\right)^{-c\varepsilon}\left\{\cos\left[c \ln\left(1+\frac{t}{t_0}\right)\right] + i \sin\left[c\ln\left(1+\frac{t}{t_0}\right)\right]\right\} \\ &\quad + D_1 + i D_2 + 2(E_1 + i E_2)\, t \end{aligned}\right\} \qquad (18),$$

$$\left.\begin{aligned} x + i y &= (A - i B)\left(1 + \frac{t}{t_0}\right)^{1-c\varepsilon}\left\{\cos\left[c \ln\left(1+\frac{t}{t_0}\right)\right] + i \sin\left[c\ln\left(1+\frac{t}{t_0}\right)\right]\right\} \\ &\quad + C_1 + i C_2 + (D_1 + i D_2)\, t + (E_1 + i E_2)\, t^2 \end{aligned}\right\} \qquad (19),$$

also z. B.

$$\left.\begin{aligned} x &= \left(1+\frac{t}{t_0}\right)^{1-c\varepsilon}\left\{A\cos\left[c\ln\left(1+\frac{t}{t_0}\right)\right] + B \sin\left[c\ln\left(1+\frac{t}{t_0}\right)\right]\right\} + C_1 + D_1 t + E_1 t^2 \\ y &= \left(1+\frac{t}{t_0}\right)^{1-c\varepsilon}\left\{A\sin\left[c\ln\left(1+\frac{t}{t_0}\right)\right] - B \cos\left[c\ln\left(1+\frac{t}{t_0}\right)\right]\right\} + C_2 + D_2 t + E_2 t^2 \end{aligned}\right\} \qquad (19a).$$

Mit den früheren Anfangsbedingungen haben wir dann für die Konstanten

$$\left.\begin{aligned} &D_1 = \frac{c g t_0}{c^2 + (1 + c\varepsilon)^2}; \qquad D_2 = -\frac{g(1 + c\varepsilon)\, t_0}{c^2 + (1 + c\varepsilon)^2}; \qquad A' = v_{0x} - D_1; \\ &E_1 = \frac{\frac{1}{2} g c}{c^2 + (1 + c\varepsilon)^2}; \qquad E_2 = -\frac{\frac{1}{2} g (1 + c\varepsilon)}{c^2 + (1 + c\varepsilon)^2}; \qquad B' = D_2 - v_{0y}; \\ &A = -C_1 = \frac{t_0\,[c^2 + (1 + c\varepsilon)^2]\,[c\, v_{0y} + (1 - c\varepsilon)\, v_{0x}] + 2 c^2 g \varepsilon t_0^{\,2}}{[c^2 + (1 + c\varepsilon)^2]\,[c^2 + (1 - c\varepsilon)^2]}; \\ &B = C_2 = \frac{t_0\,[c^2 + (1 + c\varepsilon)^2]\,[c\, v_{0x} - (1 - c\varepsilon)\, v_{0y}] - g t_0^{\,2}(1 + c^2 - c^2\varepsilon^2)}{[c^2 + (1 + c\varepsilon)^2] \cdot [c^2 + (1 - c\varepsilon)^2]} \end{aligned}\right\} \qquad (20).$$

Wenn man die Flugbahn mit dem Ansatz (19) annähern will, so lassen sich die Konstanten c und t_0 aus den Anfangswerten von v und k_a, sowie aus der Anfangsbeschleunigung bzw. der vorgegebenen Änderung $\dot{k}_a$ ermitteln. Man erhält auf diese Weise

$$v_0 \cdot (k_a)_0 = \frac{c}{t_0}; \qquad v_0 (\dot{k}_a)_0 - (k_a)_0 (g \sin \varphi_0 + k_w v_0^2) = -\frac{c}{t_0^2}.$$

Daraus folgt aber

$$\frac{1}{t_0} = \frac{g}{v_0} \sin \varphi_0 + \varepsilon (k_a)_0 \cdot v_0 - \frac{(\dot{k}_a)_0}{(k_a)_0}; \qquad c = t_0 \cdot (v k_a)_0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21).$$

4. Der Fall linearer Abhängigkeit der Bahnfrequenz von der Zeit. Die angeführten Fälle scheinen die einzigen zu sein, die eine unmittelbare Lösung in geschlossener Form mittels elementarer Funktionen zulassen. Unter den möglichen anderen Fällen möchte ich in erster Linie den Ansatz

$$f = b_0 - 2 a t$$

betrachten, also den Fall linear abnehmender Frequenz, der nicht nur mathematisch manches Interesse bietet, sondern auch praktische Bedeutung beanspruchen kann. Die Funktion F hat dann die Form

$$F = (b_0 - a t) t .$$

Für die Berechnung der Geschwindigkeit kommt es auf das Integral

$$J = \int e^{(\varepsilon - i) F} d t$$

an, mit dem wir uns zunächst zu beschäftigen haben. Führt man die Veränderliche

$$\frac{b_0 - 2 a t}{2 \sqrt{a}} = w$$

ein, setzt also

$$F = w_0^2 - w^2, \qquad d t = -\frac{d w}{\sqrt{a}},$$

so geht das Integral über in

$$J = -\frac{1}{\sqrt{a}} \int e^{(\varepsilon - i)(w_0^2 - w^2)} d w .$$

Man sieht also, daß die Geschwindigkeitsbestimmung auf die Auswertung des Fehlerintegrals, bzw. der Fresnelschen Integrale mit komplexem Argument führt. Mit

$$w^2 (1 + \varepsilon i) = \overline{w}$$

wird

$$J = -\frac{1}{\sqrt{a (1 + i \varepsilon)}} e^{-i \overline{w}_0^2} \int e^{i \overline{w}^2} d \overline{w} .$$

Zur Vereinfachung der Rechnung wollen wir hier zunächst ε vernachlässigen, also $\overline{w} = w$ setzen. Dann hat das entscheidende Integral die Form

$$J = -\frac{1}{\sqrt{a}} e^{-i w_0^2} \int^{w} e^{i w^2} d w .$$

Führt man jetzt die bekannten Fresnelschen Integrale in der üblichen Form ein, also

$$S_1 (u) = \int_0^u \cos \left(\frac{1}{2} \pi u^2\right) d u ; \qquad S_2 (u) = \int_0^u \sin \left(\frac{1}{2} \pi u^2\right) d u ,$$

so wird mit $w^2 = \frac{1}{2} \pi u^2$

$$\int_0^w e^{i w^2} d w = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^u e^{\frac{i}{2} \pi u^2} d u = \sqrt{\frac{\pi}{2}} [S_1 (w) + i S_2 (w)] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22).$$

Erstreckt man die Integration auf das Intervall von w_0 bis w und führt außerdem zur Anpassung an die Anfangsbedingungen noch die komplexe Konstante $A' + i B'$ hinzu, so kommt für die komplexe Geschwindigkeit der übersichtliche Ausdruck

$$v_x + i v_y = i g \sqrt{\frac{\pi}{2 a}} e^{i (w_0^2 - w^2)} \left\{ \left| S_1 + i S_2 \right|_{w_0}^{w} e^{-i w_0^2} + A' + i B' \right\}.$$

Sind v_{0x} und v_{0y} wieder die Anfangswerte der Geschwindigkeitskomponenten, so erhält man schließlich

$$v_x + i\,v_y = i\,g\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\,e^{-i w^2}\left[S_1(w) + i\,S_2(w)\right]_{w_0}^{w} + (v_{0x} + i\,v_{0y})\,e^{i(w_0^2 - w^2)} \quad . \quad . \quad (23)$$

oder nach Trennung des Reellen vom Imaginären, etwa für $v_{0y} = 0$

$$v_x = g\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\left\{\sin w^2\left[S_1(w) - S_1(w_0)\right] - \cos w^2\left[S_2(w) - S_2(w_0)\right]\right\} + v_0\cos(w_0^2 - w^2) \quad (24),$$

$$v_y = g\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\left\{\cos w^2\left[S_1(w) - S_1(w_0)\right] + \sin w^2\left[S_2(w) - S_2(w_0)\right]\right\} + v_0\sin(w_0^2 - w^2) \quad (25).$$

Für das Quadrat der resultierenden Geschwindigkeit ergibt sich daraus

$$\left.\begin{aligned} v^2 = v_0^2 &+ \frac{\pi g^2}{2a}\left\{\left[S_1(w) - S_1(w_0)\right]^2 + \left[S_2(w) - S_2(w_0)\right]^2\right\} \\ &+ 2g\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\cdot v_0\left\{\sin w_0^2\left[S_1(w) - S_1(w_0)\right] - \cos w_0^2\left[S_2(w) - S_2(w_0)\right]\right\} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (26).$$

Um den Grenzübergang zum Fall $a = 0$ zu vollziehen, ist zu bedenken, daß $w_{a=0} \to \infty$; aber

$$\lim_{a\to 0}(w_0^2 - w^2) = b_0\,t$$

wird. Ferner ergibt sich aus der Reihenentwicklung der Fresnelschen Integrale für große Argumente[3])

$$S_1 + i\,S_2 = \frac{1}{2}(1 + i) - i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sqrt{a}}{b_0}\,e^{i w^2}.$$

Daher

$$\left.\begin{aligned} (S_1)_{w\to\infty} = (S_2)_{w\to\infty} &= \frac{1}{2}; \\ \lim_{a\to 0}\left[S_1(w) - S_1(w_0)\right] &= \frac{1}{b_0}\sqrt{\frac{2a}{\pi}}(\sin w^2 - \sin w_0^2); \\ \lim_{a\to 0}\left[S_2(w) - S_2(w_0)\right] &= -\frac{1}{b_0}\sqrt{\frac{2a}{\pi}}(\cos w^2 - \cos w_0^2) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27).$$

Setzt man diese Grenzwerte in die Ausdrücke (25) ein, so erhält man die Komponenten der Geschwindigkeit für den widerstandsfreien Fall $b =$ konst. in der Form

$$v_x = \left(v_0 - \frac{g}{b}\right)\cos b\,t + \frac{g}{b}; \qquad v_y = \left(v_0 - \frac{g}{b}\right)\sin b\,t.$$

Die Koordinaten eines Bahnpunktes ergeben sich durch eine weitere Integration, die sich bei Einführung der Hilfsvariablen w in der Form

$$x = -\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{w_0}^{w} v_x\,d\,w; \qquad y = -\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{w_0}^{w} v_y\,d\,w$$

darstellt. Die zweite Integration läßt sich sofort durchführen, wenn man die Beziehungen

$$\int_{w_0}^{w}\cos w^2\cdot S_1(w)\,d\,w = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_{w_0}^{w} S_1\,d\,S_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[S_1^2(w)\right]_{w_0}^{w};$$

$$\int_{w_0}^{w}\sin w^2\cdot S_2(w)\,d\,w = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[S_2^2(w)\right]_{w_0}^{w}$$

beachtet. Man erhält dann den übersichtlichen Ausdruck

[3]) Vgl. etwa G. N. Watson: A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambr. 1922, S. 545 und E. Jahnke und F. Emde: Funktionentafeln, Leipzig 1938, S. 34f.

$$\left.\begin{aligned} y &= \sqrt{\frac{\pi}{2\,a}}\cdot v_0\,\{\cos w_0^2\,[S_2(w)-S_2(w_0)]-\sin w_0^2\,[S_1(w)-S_1(w_0)]\}\\ &\quad -\frac{g\,\pi}{4\,a}\,\{[S_1(w)-S_1(w_0)]^2+[S_2(w)-S_2(w_0)]^2\}\end{aligned}\right\}\quad . \; . \; . \quad (28).$$

Übrigens läßt sich diese Ordinate auch unmittelbar durch Integration der ersten Gleichung der Bewegung mit $k_w=0$ als Differenz zweier Fallhöhen darstellen:

$$y=\frac{v_0^2-v^2}{2\,g}.$$

Die Gleichwertigkeit mit dem Ausdruck (28) folgt dann durch Einsetzung des Geschwindigkeitsquadrats aus (26).

Um die andere Koordinate zu berechnen, bedarf es dagegen der Reihenentwicklung der Fresnelschen Integrale, also etwa der Formeln

$$\left.\begin{aligned} \int_0^w \cos w^2\,d\,w &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot S_1(w) = w\,[U(w^2)\cos w^2+V(w^2)\sin w^2]\,;\\ \int_0^w \sin w^2\,d\,w &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot S_2(w) = w\,[U(w^2)\sin w^2-V(w^2)\cos w^2]\end{aligned}\right\}\quad . \; . \; . \; . \quad (29),$$

wo

$$U=1-\frac{(2\,w^2)^2}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{(2\,w^2)^4}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}-\cdots\,;\qquad V=\frac{2\,w^2}{1\cdot 3}-\frac{(2\,w^2)^3}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\cdots\quad . \; . \; . \; . \; . \quad (29\text{a})$$

zu setzen ist. Damit erhält man aber

$$\left.\begin{aligned} &\sin w^2\int_{w_0}^{w}\cos w^2\,d\,w-\cos w^2\int_{w_0}^{w}\sin w^2\,d\,w = w\,V(w^2)-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,[\sin w^2\cdot S_1(w_0)-\cos w^2\,S_2(w_0)],\\ &\text{also}\\ &x=\frac{g\,\pi}{2\,a}\,[S_1(w_0)\cdot S_2(w)-S_2(w_0)\cdot S_1(w)]\\ &\quad -v_0\sqrt{\frac{\pi}{2\,a}}\,\{\cos w_0^2\,[S_1(w)-S_1(w_0)]+\sin w_0^2\,[S_2(w)-S_2(w_0)]\}-\frac{g}{2\,a}\,[\Phi(w^2)-\Phi(w_0^2)]\end{aligned}\right\}\quad (30),$$

wenn $\Phi(w^2)$ das folgende Integral bedeutet:

$$\Phi(w^2)=\int V(w^2)\,d\,w^2=\frac{(w^2)^2}{1\cdot 3}-\frac{2\,(w^2)^4}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\cdots$$

Die vorkommenden Reihen, sowie die Reihe $\Phi(w^2)$ sind allerdings nur für kleine Werte von w zu gebrauchen. Für mittlere Werte von w, wie sie in unserem Falle vorliegen, geht man am zweckmäßigsten aus von folgenden Entwicklungen:

$$\int_w^\infty \cos w^2\,d\,w = M(w)\cos w^2-N(w)\sin w^2\,;\qquad \int_w^\infty \sin w^2\,d\,w = M(w)\sin w^2+N(w)\cos w^2\quad . \quad (31),$$

wo für M und N die Reihen

$$M(w)=\frac{1}{4\,w^3}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{4^2\cdot w^7}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{4^3\cdot w^{11}}-\cdots\,;\qquad N(w)=\frac{1}{2\,w}-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot w^5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4^2\cdot w^9}-\cdots\quad . \quad (31\text{a})$$

einzusetzen sind, die u. a. von A. Lindstedt[4]) tabuliert sind. Es ergibt sich dann

$$\begin{aligned} P=\sin w^2\int_{w_0}^{w}\cos w^2\,d\,w-\cos w^2\int_{w_0}^{w}\sin w^2\,d\,w &= \sin w^2\,\Big[\int_\infty^{w}\cos w^2\,d\,w-\int_\infty^{w_0}\cos w^2\,d\,w\Big]\\ &\quad -\cos w^2\,\Big[\int_\infty^{w}\sin w^2\,d\,w-\int_\infty^{w_0}\sin w^2\,d\,w\Big].\end{aligned}$$

[4]) Vgl. A. Lindstedt: Zur Theorie der Fresnelschen Integrale, Ann. der Physik u. Chemie (3), 17 (1882), S. 720.

Setzt man die Reihen ein und beachtet, daß

$$\int_{\infty}^{w_0} \cos w^2 \, d\, w = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[S_1 (w_0) - \frac{1}{2} \right]; \qquad \int_{\infty}^{w_0} \sin w^2 \, d\, w = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[S_2 (w_0) - \frac{1}{2} \right],$$

so wird

$$P = N(w) - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \sin w^2 \left[S_1 (w_0) - \frac{1}{2} \right] - \cos w^2 \left[S_2 (w_0) - \frac{1}{2} \right] \right\}.$$

Damit erhält man aber für die Koordinate x den Ausdruck

$$\left.\begin{aligned} x = \sqrt{\frac{\pi}{2\,a}} \Bigg\{ & \left[\frac{g}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2\,a}} - v_0 \cos w_0^2 \right] [S_1 (w) - S_1 (w_0)] \\ & - \left[\frac{g}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2\,a}} + v_0 \sin w_0^2 \right] [S_2 (w) - S_2 (w_0)] \Bigg\} \\ & + \frac{g\,\pi}{2\,a} [S_2 (w_0)\, S_2 (w) - S_2 (w_0)\, S_2 (w)] - \frac{g}{a} [\Psi (w) - \Psi (w_0)] \end{aligned} \right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (32),$$

wenn

$$\Psi (w) = \frac{1}{2} \ln w + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 4} \cdot \frac{1}{w^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4^2 \cdot 8} \cdot \frac{1}{w^8} + \cdots = \int^{w} N(w)\, d\, w$$

gesetzt wird.

Grundsätzlich ist es natürlich auch möglich, den Fall $\varepsilon \neq 0$ nach der angegebenen Methode zu behandeln. Da aber die Formeln sehr umständlich werden und die einschlägigen Funktionentabellen für komplexe Argumente nur unvollständig bearbeitet sind, so haben wir vorläufig von der Behandlung des allgemeinen Falles abgesehen.

5. Anwendung auf Looping-Bewegungen. Um die gegebenen Ansätze auf bestimmte Fälle anzuwenden und namentlich den Einfluß der Änderung der Bahnfrequenz zu zeigen, haben wir für die betrachteten drei Fälle je ein Beispiel gewählt und dabei folgende Grundannahmen benutzt. Der Einfachheit halber ist zunächst vorausgesetzt, daß in der tangentialen Richtung die Kraftresultierende, also ε verschwindet. Ferner ist die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 72$ m/s und der Anfangswert der Frequenz $b_0 = 0{,}6\,\mathrm{s}^{-1}$ zugrunde gelegt. Im ersten Beispiel (I) ist b konstant, während bei den anderen Beispielen b abnimmt und zwar bei II hyperbolisch, bei III linear, derart, daß der Differentialquotient $\frac{d\,b}{d\,t}$ für $t = 0$ in beiden Fällen denselben Wert hat. Damit erhalten wir dann folgende Zusammenstellung der oben eingeführten Kennwerte

$$\left.\begin{array}{l} \text{Fall I} \\ \text{Fall II} \\ \text{Fall III} \end{array}\right\} \begin{array}{c} b = b_0 = 0{,}6\,\mathrm{s}^{-1} \\ v_0 = 72\,\mathrm{m/s},\, b = \dfrac{c}{t + t_0},\; c = 18,\; t_0 = 30\,\mathrm{s},\; b_0 = 0{,}6 \\ b = b_0 - 2\,a\,t,\; a = 0{,}01,\; b_0 = 0{,}6 \end{array}$$

Zahlentafel für die Konstanten zur Berechnung der Looping-Bahnen I und II.

I (b = konst = $0{,}6\,\mathrm{s}^{-1}$).

E	$A = -C_1$	$B = C_2$	A'	B'	D_1	D_2		
0	0	92,75	55,65	0	16,35	0		
0,08	− 5,237	92,57	55,75	− 1,30	16,26	− 1,30		

II $\left(b = \frac{c}{t + t_0},\; c = 18,\; t_0 = 30\,\mathrm{s}\right)$

E	$A = -C_1$	$B = C_2$	A'	B'	D_1	D_2	E_1	E_2
0	6,65	92,46	55,70	− 0,906	16,30	− 0,906	0,276	− 0,0151
0,08	1,53	93,28	55,95	− 2,176	16,05	− 2,176	0,268	− 0,0363

Die Zahlentafel gibt die Werte der bei der Berechnung der Geschwindigkeiten und Koordinaten benutzten Konstanten der Fälle I und II. In den Bildern 1, 2, 3 ist der Verlauf der Geschwindigkeit und das Verhältnis c_a/c_{a0} in Abhängigkeit von der Zeit graphisch veranschau-

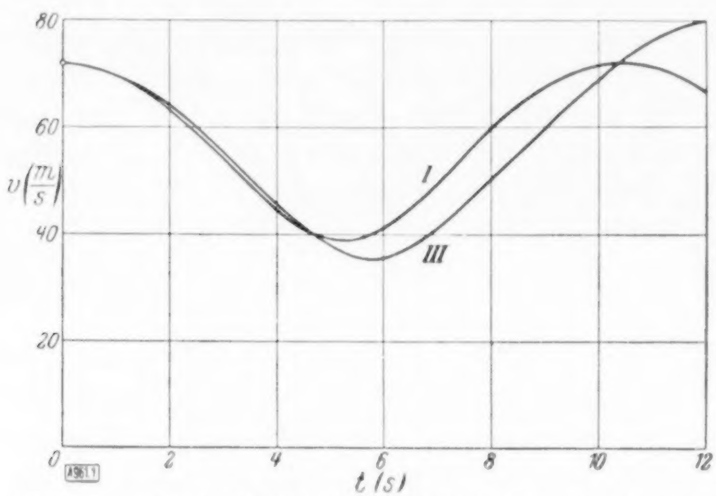


Bild 1. Geschwindigkeitsverlauf bei konstanter und abnehmender Bahnfrequenz ($\varepsilon = 0$).

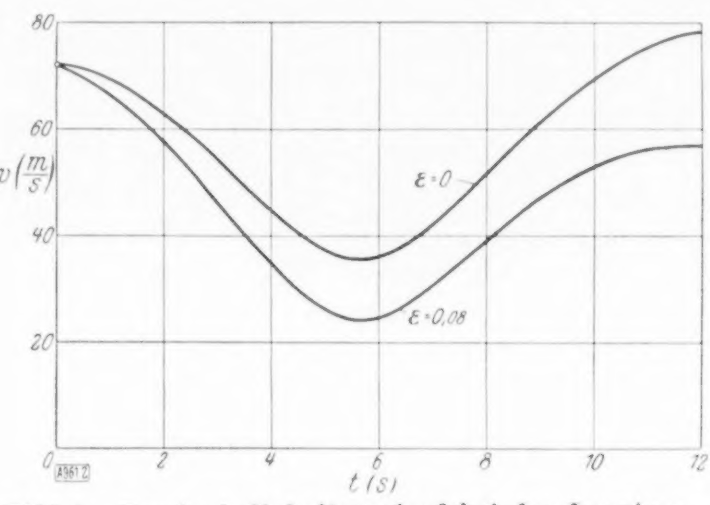


Bild 2. Geschwindigkeitsverlauf bei der Looping-Bewegung II (Einfluß des Widerstandes).

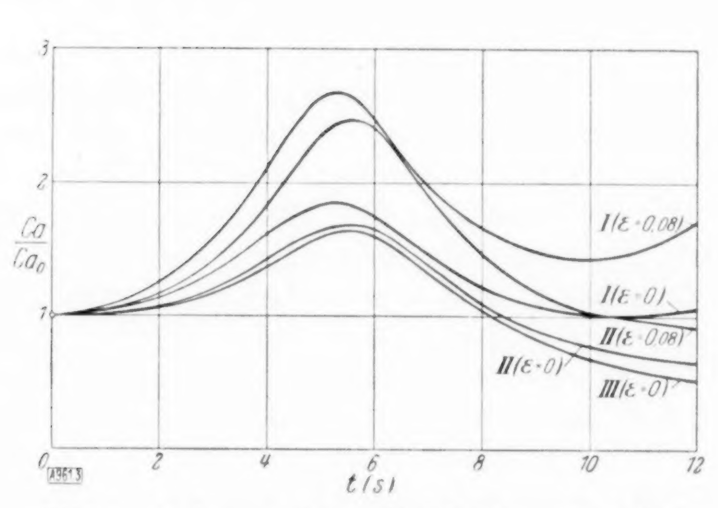
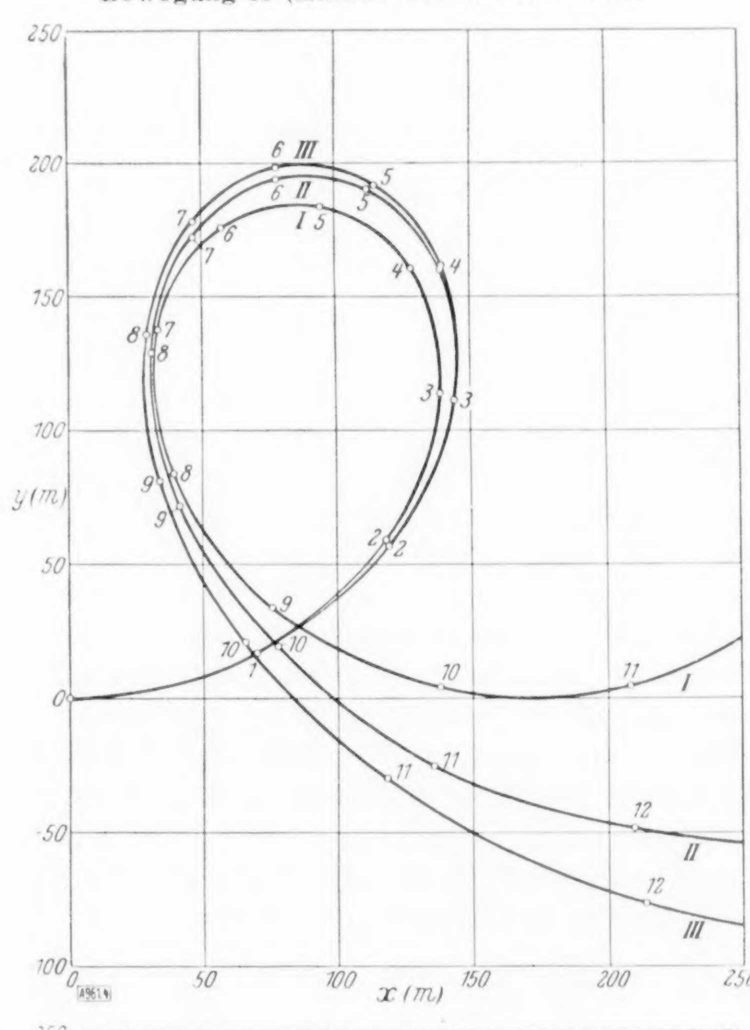
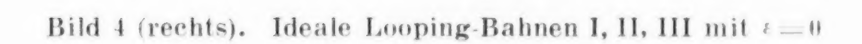


Bild 3. Änderung des Auftriebsbeiwertes bei den Looping-Bahnen I, II, III.




Bild 4 (rechts). Ideale Looping-Bahnen I, II, III mit $\varepsilon = 0$

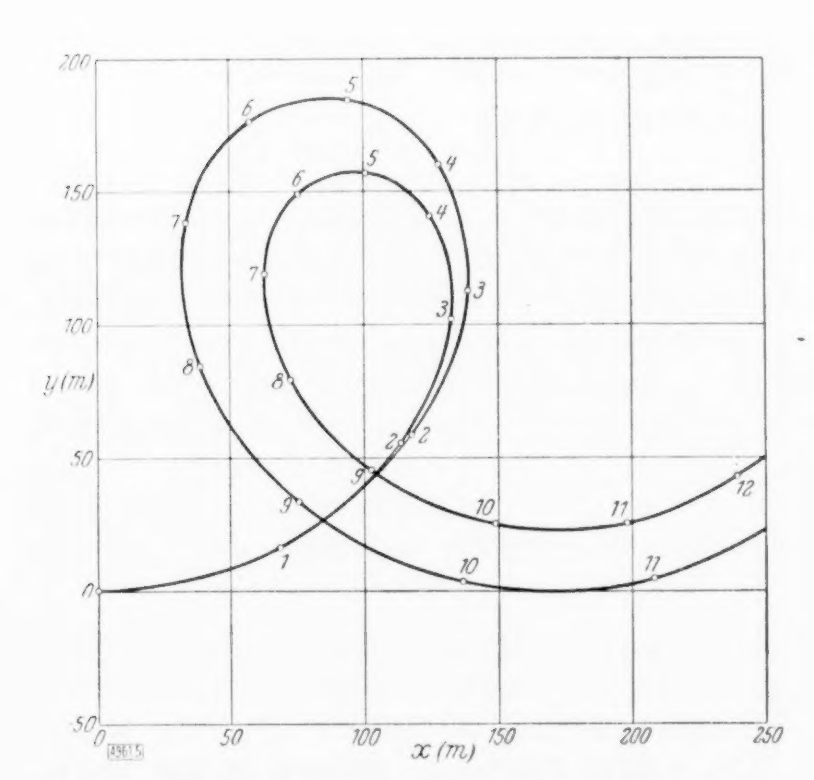


Bild 5. Einfluß des Widerstandes auf die Looping-Bahn I.

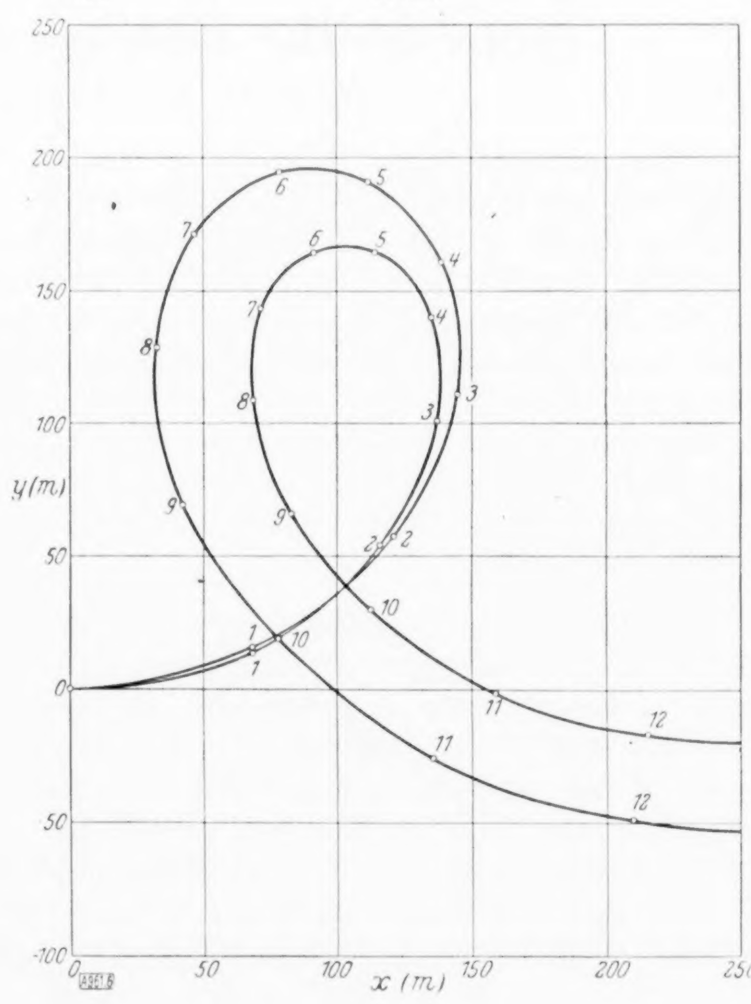


Bild 6 (rechts). Einfluß des Widerstandes auf die Looping-Bahn II.

licht. Was die in Bild 4 dargestellten Flugbahnen angeht, so sieht man, daß die beiden Kurven II und III in den ersten Sekunden nur wenig voneinander abweichen. Der Abnahme der Frequenz entspricht eine Senkung des abfallenden Zweiges der Flugbahn, die für den Fall III verständlicherweise am stärksten in die Erscheinung tritt. Bemerkenswert ist ferner, daß der Anstieg auf den Bahnen II und III höher ausfällt als bei I, obwohl die Beiwertvergrößerung, also auch die Anstellwinkel-Vergrößerung schwächer ist als im Falle gleichbleibender Frequenz. Der Grund ist natürlich darin zu suchen, daß bei abnehmender Frequenz die Bahnkrümmung schwächer wird.

Um ferner den Einfluß des Widerstandes deutlich zu machen, haben wir in den Bildern 5 und 6 die Kurven II mit $\varepsilon = 0{,}08$ berechnet unter Beibehaltung der Anfangsbedingungen und mit den widerstandsfreien Bahnen zusammengestellt. Wenn man von der Dämpfung absieht, so stimmen beide Kurven in dem Schwingungscharakter überein. Mit der Dämpfung der Geschwindigkeit hängt der stärkere Anstieg des Verhältnisses $\frac{c_a}{c_{a0}}$ zusammen, das bei der benutzten Gleitzahl etwa den Wert 2,5 erreicht gegenüber dem Wert 1,7 bei $\varepsilon = 0$. Im übrigen ändert sich Gestalt und Lage der Looping-Bahn dahin ab, daß sich die Schleife zusammenzieht und der abfallende Teil der Bahn etwa 30 m höher liegt als im widerstandsfreien Fall.

Schlußbemerkung. Der praktische Wert der gegebenen Entwicklungen liegt vor allem in der Möglichkeit, eine irgendwelchen Bedingungen unterworfene Bewegung eines Flugzeugs durch Zusammensetzung von Bahnelementen von der berechneten Art anzunähern, wie ich das früher an einem Beispiel durchgeführt habe, bei dem insbesondere der Bahntypus I benutzt wurde. Dabei kann natürlich auch auf die Veränderlichkeit der Gleitzahl Rücksicht genommen werden. Ist z. B. k_a irgendwie in Abhängigkeit von der Zeit vorgegeben, so läßt sich mit Hilfe der Anfangsbedingungen für Geschwindigkeit und Beschleunigung auch die anfängliche Änderung der Frequenz angeben und damit eine Annäherung der Flugbahn in einem verhältnismäßig großen Intervall ermitteln. Die für das Ende dieses Bereichs bestimmbare Geschwindigkeit gibt dann mit dem bekannten dort herrschenden Werte b die Größe k_a, die mit dem vorgegebenen Werte verglichen werden kann. Stimmen beide Werte nicht überein, so ist die Rechnung nach einem iterierenden Verfahren zu verbessern. Auf diesem Wege gelingt es jedenfalls, die Flugbahn mit allen wichtigen Daten, wie Geschwindigkeit, Frequenz usw. mit guter Genauigkeit zu ermitteln, ohne daß es nötig wäre, zu kleinen Größen seine Zuflucht zu nehmen. Die Güte der Annäherung kann noch erhöht werden durch Verwendung des aus v und b zu berechnenden Krümmungshalbmessers besonders bei Looping-Bewegungen, bei denen kein Vorzeichenwechsel der Krümmung eintritt. Die vielen weiteren Sonderfragen, die sich etwa auf Optimalforderungen für die Flugbewegung beziehen, müssen einer besonderen Bearbeitung vorbehalten bleiben. 961

Note on the sinkage of a ship at low speeds.

By T. H. Havelock in Newcastle-on-Tyne.

Zusammenfassung. Um einen Anhalt für die Zunahme des Tiefganges eines Schiffes bei genügend kleinen Geschwindigkeiten zu haben, ersetzt Verf. den eintauchenden Teil des Schiffes durch ein Halbellipsoid, dessen ebene Grenzfläche mit den Halbachsen a und b in der Höhe des Wasserspiegels liegt. Um diesen Körper nimmt er eine Potentialströmung an, für die die Wasseroberfläche eben bleibt. Aus dieser wird die Abnahme Q des Druckes nach oben berechnet und die Zunahme h des Einsinkens mittels der Gleichung $Q = a\,b\,\pi \cdot \varrho\,g \cdot h$ bestimmt. Die so gefundenen numerischen Resultate stimmen mit denen aus einer empirischen Formel von Horn für wirkliche Schiffskörper der Größenordnung nach gut überein. Weiter geht Verf. auf eine andere Hornsche Näherungsformel ein, die es erlaubt, aus dem Einsinken die Zunahme des Reibungswiderstandes eines Modelles, verglichen mit dem einer ebenen Platte, abzuschätzen.

1. The general problem of the position of relative equilibrium of a ship in uniform motion is a complicated one, and the following note deals only with a simplified form of the problem suitable for low speeds. It is generally assumed that at sufficiently low speeds the fluid motion approximates to the stream-line flow round the ship, neglecting the disturbance of the surface of the water; the sinkage is then due to the defect of vertical pressure caused by the fluid motion and should be proportional to the square of the speed. There do not seem to have been any calculations made to test whether these assumptions lead to results of the right order of magnitude. Such calculations might be carried out numerically for ordinary ship forms, but it is sufficient for the present purpose to take a simple form. We

assume the submerged part of the ship to be ellipsoidal. The solution of the corresponding potential problem is well-known, and an exact expression can easily be found for the total defect of vertical pressure, and hence we obtain a certain equivalent sinkage.

The problem is of some interest since Professor Horn[1]) has proposed to estimate the so-called form effect upon resistance by an approximate formula involving the sinkage at low speeds. The expressions obtained here for ellipsoidal forms are compared numerically with these results and with other experimental data.

2. A solid, whose surface is given by

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1; \qquad a>b>c \quad \ldots \quad (1);$$

is moving through an infinite liquid with velocity U parallel to the axis Ox. The velocity potential of the fluid motion is given by

$$\varphi=\frac{a\,b\,c}{2-\alpha_0}\,U\,x\int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)^{3/2}(b^2+\lambda)^{1/2}(c^2+\lambda)^{1/2}} \quad \ldots \quad (2),$$

in which (x, y, z) are given in terms of orthogonal coordinates (λ, μ, ν) by

$$x^2=\frac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)} \quad \ldots \quad (3),$$

with similar expressions for y and z.

In these coordinates the ellipsoid (1) is given by $\lambda=0$; and we have also

$$\alpha_0=a\,b\,c\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)^{3/2}(b^2+\lambda)^{1/2}(c^2+\lambda)^{1/2}}=\frac{2\,a\,b\,c}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)^{1/2}}(F-E) \quad \ldots \quad (4),$$

F, E being elliptic integrals with parameters given by

$$\sin\alpha=\{(a^2-b^2)/(a^2-c^2)\}^{1/2}; \ \sin\chi=(a^2-c^2)^{1/2}/a \quad \ldots \quad (5).$$

The fluid pressure is given by

$$p=p_0+\varrho\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{1}{2}\varrho\,q^2=p_0-\varrho\,\overline{U}\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{1}{2}\varrho\,q^2 \quad \ldots \quad (6).$$

If (l, m, n) are the direction-cosines of the normal at any point of the ellipsoid, the required total defect of resolved pressure Q is given by

$$Q=\varrho\iint\left(\overline{U}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{1}{2}q^2\right)n\,dS \quad \ldots \quad (7),$$

the integral being taken over the half surface of the ellipsoid lying on one side of the xy-plane. Using well-known properties of the coordinates λ, μ, ν (as given, for example, in Lamb's Hydrodynamics, p. 149), it can be shown that, on the ellipsoid $\lambda=0$, we have

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\overline{U}}{2-\alpha_0}\left\{\alpha_0-\frac{2\,b^2c^2(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)\,\mu\,\nu}\right\},$$

and

$$\left.\begin{aligned} q^2=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2&=\overline{U}^2\frac{b^2c^2(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)\,\mu\,\nu} \\ +\left(\frac{\alpha_0}{2-\alpha_0}\right)^2\overline{U}^2&\left\{\frac{(b^2+\mu)(c^2+\mu)}{\mu(a^2+\mu)(\mu-\nu)}+\frac{(b^2+\nu)(c^2+\nu)}{\nu(a^2+\nu)(\nu-\mu)}\right\}\frac{a^2(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (8).$$

Further, we also have

$$n\,dS=\frac{1}{4}\,a\,b\left\{\frac{(\mu-\nu)(\nu-\mu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)(a^2+\mu)(b^2+\mu)(a^2+\nu)(b^2+\nu)}\right\}^{1/2}d\mu\,d\nu \quad (9)$$

[1]) Horn, Intern. Tagg. der Leiter der Schleppversuchsanstalten, 1937, S. 20.

Hence we obtain

$$\left.\begin{aligned} Q = \frac{a\,b\,\varrho\,\overline{U}^2}{\{(a^2-c^2)(b^2-c^2)\}^{1/2}} \int\limits_{-c^2}^{-b^2} d\,\mu \int\limits_{-b^2}^{-a^2} d\,\nu \left[\frac{\alpha_0}{2-\alpha_0} - \left(\frac{\alpha_0}{2-\alpha_0}+\frac{1}{2}\right)\frac{b^2\,c^2\,(a^2+\mu)\,(a^2+\nu)}{(a^2-b^2)\,(a^2-c^2)\,\mu\,\nu}\right. \\ \left. + \left(\frac{\alpha_0}{2-\alpha_0}\right)^2 \frac{a^2\,(a^2+\mu)\,(a^2+\nu)}{2\,(a^2-b^2)\,(a^2-c^2)} \left\{\frac{(b^2+\mu)\,(c^2+\mu)}{u\,(a^2+\mu)\,(\mu-\nu)} + \frac{(b^2+\nu)\,(c^2+\nu)}{\nu\,(a^2+\nu)\,(\nu-\mu)}\right\}\right] \\ \cdot \left[\frac{(\mu-\nu)\,(\nu-\mu)}{(a^2+\mu)\,(b^2+\mu)\,(a^2+\nu)\,(b^2+\nu)}\right]^{1/2} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (10).$$

Carrying out the integrations, and writing

$$Q = \pi\,g\,\varrho\,a\,b\,h \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11),$$

we obtain, for $a > b > c$,

$$\left.\begin{aligned} \frac{g\,h}{\overline{U}^2} = \frac{\alpha_0}{2-\alpha_0} + \frac{2+\alpha_0}{2\,(2-\alpha_0)}\,\frac{b\,c^2}{(a+b)\,(a^2-c^2)} + \left(\frac{\alpha_0}{2-\alpha_0}\right)^2 \frac{a\,(a^2+a\,b-c^2)}{2(a+b)(a^2-c^2)} \\ - \frac{2}{(2-\alpha_0)^2}\,\frac{a\,b\,c^2}{(a^2-c^2)^{3/2}\,(b^2-c^2)^{1/2}} \log\frac{b\,(a^2-c^2)^{1/2}+a\,(b^2-c^2)^{1/2}}{c\,(a^2-c^2)^{1/2}+c\,(b^2-c^2)^{1/2}} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (12).$$

3. We require also the corresponding expression for an ellipsoid with $a > c > b$. This may be deduced directly from (12); or, alternatively, we may proceed as in the previous section but replacing $n\,d\,S$ in (7) by $m\,d\,S$, given by

$$m\,d\,S = \frac{1}{4}\,a\,c \left\{\frac{(\mu-\nu)\,(\nu-\mu)}{(b^2-c^2)\,(b^2-a^2)\,(a^2+\mu)\,(a^2+\nu)\,(c^2+\mu)\,(c^2+\nu)}\right\}^{1/2} d\,\mu\,d\,\nu \quad . \; . \; . \; . \quad (13).$$

After carrying out the integrations, we interchange b and c so that we may express the result by means of (11).

We obtain, for $a > c > b$

$$\left.\begin{aligned} \frac{g\,h}{U^2} = \frac{\alpha_0}{2-\alpha_0} + \frac{2+\alpha_0}{2\,(2-\alpha_0)}\,\frac{b\,c^2}{(a+b)\,(a^2-c^2)} + \left(\frac{\alpha_0}{2-\alpha_0}\right)^2 \frac{a\,(a^2+a\,b-c^2)}{2\,(a+b)(a^2-c^2)} \\ - \frac{2}{(2-\alpha_0)^2}\,\frac{a\,b\,c^2}{(a^2-c^2)^{3/2}\,(c^2-b^2)^{1/2}} \quad \arctan \quad \frac{\{(a^2-c^2)\,(c^2-b^2)\}^{1/2}}{a\,b+c^2} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14).$$

In this case, instead of (4) and (5), we have

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 = \frac{2\,a\,b\,c}{(a^2-c^2)\,(a^2-b^2)^{1/2}}\,(F-E), \\ \sin\alpha = \{(a^2-c^2)/(a^2-b^2)\}^{1/2}, \qquad \sin\chi = (a^2-b^2)^{1/2}/a \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15).$$

4. The prolate spheroid may be considered separately, or may be deduced from the two previous cases. Taking limiting values, both (12) and (14) reduce to the expression for this case.

For $a > b$; $b = c$, we obtain

$$\frac{g\,h}{\overline{U}^2} = \frac{\alpha_0}{2-\alpha_0} - \frac{2+\alpha_0}{2\,(2-\alpha_0)}\,\frac{b^2}{(a+b)^2} + \left(\frac{\alpha_0}{2-\alpha_0}\right)^2 \frac{a\,(a+2\,b)}{2\,(a+b)^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

and in this we have

$$\alpha_0 = \frac{2\,(1-e^2)}{e^3}\left(\frac{1}{2}\log\frac{1+e}{1-e} - e\right); \qquad e^2 = 1 - b^2/a^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17).$$

5. To apply these results to the problem under consideration we imagine a ship for which the immersed portion is ellipsoidal, the $x\,y$-plane being the water surface and the sides of the ship above water being vertical. Owing to the defect of buoyancy, which has been denoted by Q, the ship will sink in the water. This will, of course, alter the fluid motion; but for approximate comparison with experimental results, we define the equivalent sinkage h so that Q is equal to the weight of a volume of water of height h and of cross section equal to the section of the ship by the water surface; that is, h is defined by (11).

If the length, beam and draft of the ship are L, B, D respectively, then $L=2a$, $B=2b$, $D=c$; for $B >, <, = 2D$ we use the expressions (12), (14) and (16) respectively. The numerical values shown in Table I have been calculated from these formulae.

Table I. Values of $g h/\overline{U}^2$.

B/D	$L/D=10$	$L/D=16$
1	0.0253	0.0138
2	.0453	.0231
3	.0612	.0318
4	.0735	.0397

6. The measured sinkage of ship models at low speeds has been analysed by Horn[1]), who has given an empirical formula derived as an average from available data for many different forms of model. His expression for the sinkage is, in the present notation

$$h=\frac{1}{200}(0.35+P)\left\{\frac{1}{5}\left(11.25-\frac{L}{B}\right)^2+2.5\right\}\left(1.3-\frac{B}{10\,D}\right)\frac{\overline{U}^2}{g} \quad \ldots\ldots \quad (18),$$

where L, B, D are length, beam and draft respectively, and P is the prismatic coefficient of the form; the formula is valid, as an average, for suitable ranges of these parameters.

It should be noted that this formula is for actual measured sinkage, and is probably derived from velocities rather higher than those for which the preceding simple calculation is valid; moreover, the ellipsoid is not one of the ship forms included in the data. However we may use it to test the order of magnitude of the results. If we apply (18) to an ellipsoidal form with $L/B=8$ and $B/D=2$, we obtain $h=0.0283\,\overline{U}^2/g$; this compares with the value $0.0231\,\overline{U}^2/g$ for this case given in Table I.

Horn[1]) has suggested using the sinkage at low speeds to estimate the increased frictional drag for a model compared with a flat plate; his formula for the percentage increase in the resistance R is

$$100\,\Delta R/R=200\,g\,h/\overline{U}^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19).$$

For the prolate spheroid with $L/B=8$, the value of h in Table I gives, according to the formula (19), an increase of 4.6 per cent in the resistance.

Amtsberg[2]) has recently determined the resistance of a submerged prolate spheroid experimentally; he gives two values for the increase, namely 5.2 per cent and 3.7 per cent, the smaller value being obtained after applying certain corrections. Amtsberg also investigated certain other surfaces of revolution, for which the velocity potential is given by a source distribution along the axis. He gives numerical values of the ordinates of the surface and of the theoretical distribution of velocity along the contour; from these, it is possible to evaluate numerically the integral we have denoted by Q in the preceding sections. Taking, for example, the values given by Amtsberg for his model R 1257, we obtain approximately $Q=0.0284\,\varrho\,\overline{U}^2$ (area of section). This gives an equivalent sinkage of $0.0284\,\overline{U}^2/g$ and, according to (19), an increase of resistance of about 5.7 per cent; the values deduced by Amtsberg from his experimental results are 7.3 and 4.9 per cent, the latter being the corrected value.

It is well-known that in models of this type the measured distribution of pressure over the surface only differs appreciably from the theoretical value near the rear end of the model. Hence the effect of this divergence upon the resolved vertical pressure will only be a small correction; taking, for example, model R 1257 and using Amtsberg's measured values of the pressure instead of the theoretical values, a rough approximation gives a factor of 0.0288 instead of 0.0284.

7. Summary. The sinkage of a model at sufficiently low speeds is assumed to be due to stream line fluid motion round the submerged part of the model, neglecting the disturbance of the water surface. Taking an ellipsoidal form for the submerged part, exact expressions are found for the total defect of vertical pressure and hence for a certain equivalent sinkage. The results are compared numerically with available data and are found to be of the right order of magnitude. Further, reference is made to Horn's approximate formula connecting the sinkage with the increase of resistance of the model compared with that of a flat plate.
949

[2]) Amtsberg, Jahrb. der Schiffsbautechn. Gesellsch., Bd. 38, 1937, S. 177.

Die Beullast abgestufter Kreisplatten.

Von *Fr. A. Willers* in Dresden.

Die Knicksicherheit kreisrunder Platten kann man dadurch vergrößern, daß man beiderseits konzentrisch kleinere Kreisplatten aufschweißt. Damit die Mittelfläche der Platte eben bleibt, müssen diese beiderseits aufgeschweißten Plattenstücke gleich groß und gleich stark sein. Für das Folgende sei vorausgesetzt, daß die aufgelegten Stücke ihrer ganzen Ausdehnung nach mit der Grundplatte verbunden sind.

1. Der Ausdruck für die Formänderungsarbeit und seine erste Variation. Wie im allgemeinen bei elastischen Problemen geht man auch hier am besten davon aus, daß die potentielle Energie, d. h. die Differenz zwischen Formänderungsarbeit und Arbeit der äußeren Kräfte in der Gleichgewichtslage ein Minimum sein muß. Im Fall der Plattenknickung ist der zum Minimum zu machende Ausdruck, der selbst den Wert Null hat, durch die sog. Bryansche Gleichung gegeben[1]). Für den Fall, daß die Platte am Rande durch gleichmäßig verteilte, konstante, in der Plattenmittelebene wirkende Druckkräfte p beansprucht wird, lautet diese Gleichung in kartesischen Koordinaten

$$J=\iint\left\{\frac{B}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2-2(1-\mu)\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right\}\right]-\frac{p}{2}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]\right\}dx\,dy=0 \;{}^{2)} \quad (1),$$

wo die Plattenkonstante $B=\frac{G h^3}{6(1-\mu)}$, $\mu=\frac{1}{m}$ die Querkontraktionszahl, G der Schubmodul und h die Plattendicke, die nicht konstant zu sein braucht, ist. Dabei fällt die x, y-Ebene mit der Mittelebene der nicht ausgebeulten Platte zusammen; w mißt die Ausbeulung in der Richtung der z-Achse, und das Integral ist über die ganze Platte zu erstrecken.

Weiterhin sollen nun Kreisplatten oder Teile solcher Platten betrachtet werden. Deswegen werde die Gl. (1) auf ebene Polarkoordinaten r und ϑ transformiert. Man erhält

$$\left.\begin{aligned}J=\iint\Bigg\{\frac{B}{2}\Bigg(\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2}\right]^2-2(1-\mu)\left[\frac{1}{r^2}\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial \vartheta}\right)^2\right\}\right.\\ \left.+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{2}{r^3}\frac{\partial w}{\partial \vartheta}\frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial \vartheta}-\frac{1}{r^4}\left(\frac{\partial w}{\partial \vartheta}\right)^2\right]\Bigg)-\frac{p}{2}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \vartheta}\right)^2\right]\Bigg\}\,r\,dr\,d\vartheta=0\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (2),$$

wo das Integral ebenfalls über die ganze Platte zu nehmen ist. Hat man nun etwa einen Kreissektor vom Öffnungswinkel Θ, dessen Dicke sich sprungweise in einzelnen konzentrischen Kreisbogen vom Radius $R_1, R_2, \ldots R_{n-1}$ ändert, und greifen längs der einzelnen Stufen weitere stetig verteilte konstante Normalkräfte an, deren Resultierende in der Plattenmittelebene liegen, so tritt an Stelle des einen Integrales (2) eine Summe von n Integralen, deren jedes über einen Kreisringsektor erstreckt ist. Da in diesem das h_m jetzt einen konstanten Wert hat, kann das B_m vor das m-te Integral genommen werden. Führt man weiter unter Benutzung der Bezeichnungen des Bildes 1 die Abkürzung

$$H_m=\sum_{i=m}^{n} P_i$$

ein, setzt

$$B_m=\frac{G h_m^3}{6(1-\mu)} \quad \text{und} \quad \lambda_m^2=\frac{H_m}{B_m},$$

so lautet der zum Minimum zu machende Ausdruck

Bild 1.

$$\left.\begin{aligned}J=\sum_{m=1}^{n}\frac{B_m}{2}\int_0^{\Theta}\int_{R_{m-1}}^{R_m}\Bigg\{\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w_m}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w_m}{\partial \vartheta^2}\right]^2-2(1-\mu)\left[\frac{1}{r^2}\left\{\frac{\partial^2 w_m}{\partial r^2}\frac{\partial^2 w_m}{\partial \vartheta^2}-\left(\frac{\partial^2 w_m}{\partial r\,\partial \vartheta}\right)^2\right\}\right.\\ \left.+\frac{1}{r}\frac{\partial w_m}{\partial r}\frac{\partial^2 w_m}{\partial r^2}+\frac{2}{r^3}\frac{\partial w_m}{\partial \vartheta}\frac{\partial^2 w_m}{\partial r\,\partial \vartheta}-\frac{1}{r^4}\left(\frac{\partial w_m}{\partial \vartheta}\right)^2\right]-\frac{\lambda_m^2}{2}\left[\left(\frac{\partial w_m}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w_m}{\partial \vartheta}\right)^2\right]\Bigg\}\,r\,dr\,d\vartheta=0\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

[1]) Siehe z. B. Handbuch der Physik Bd. 6, Berlin (1928) S. 293. Man kann diese Gleichung z. B. so erhalten, daß man die Differenz zwischen dem Ausdruck für die Formänderungsarbeit der bis zum kritischen Wert zusammengedrückten Platte im ebenen und im ausgebeulten Zustand bildet. Hält man beim Ausbeulen die Ränder fest, so leisten die äußeren Kräfte keine Arbeit, und man sieht, daß diese Differenz Null ist. Vgl. z. B. Marguerre, Z. angew. Math. Mech., Bd. 18 (1938) S. 57 bis 73.

[2]) Diesen Ausdruck erhält man z. B. auf dem in obiger Anmerkung angegebenen Wege aus der Gl. (36) der Arbeit von Marguerre-Trefftz, Z. angew. Math. Mech., Bd. 17 (1937) S. 85 bis 100, falls man (36) über die Platte integriert.

und für die erste Variation dieser Werte erhält man nach einigen Umformungen:

$$
\left.
\begin{aligned}
\delta J = \sum_{m=1}^{n} B_m \Bigg\{ & \int_0^{\Theta} r \left[\mu \Delta w_m + (1-\mu) \frac{\partial^2 w_m}{\partial r^2}\right] \frac{\partial \delta w_m}{\partial r} \Bigg|_{R_{m-1}}^{R_m} d\vartheta + \int_{R_{m-1}}^{R_m} \left[2 \frac{\partial^2}{\partial r \partial \vartheta}\left(\frac{w_m}{r}\right)\right] \frac{\partial \delta w_m}{\partial r} \Bigg|_0^{\Theta} d r \\
& + \int_0^{\Theta} \left[-r \frac{\partial \Delta w_m}{\partial r} - (1-\mu) \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w_m}{\partial \vartheta^2}\right) - \lambda_m^2 r \frac{\partial w_m}{\partial r}\right] \delta w_m \Bigg|_{R_{m-1}}^{R_m} d\vartheta \\
& + \int_{R_{m-1}}^{R_m} \left[\frac{1}{r} \Delta w_m - (1-\mu) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w_m}{\partial r^2}\right] \frac{\partial \delta w_m}{\partial \vartheta} \Bigg|_0^{\Theta} d r \\
& + \int_{R_{m-1}}^{R_m} \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial \Delta w_m}{\partial \vartheta} + (1-\mu) \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w_m}{\partial r^2}\right) - \lambda_m^2 \frac{1}{r} \frac{\partial w_m}{\partial \vartheta}\right] \delta w_m \Bigg|_0^{\Theta} d r \\
& + \int_0^{\Theta} \int_{R_{m-1}}^{R_m} (\Delta \Delta w_m + \lambda_m^2 \Delta w_m)\, r \, d r \, d\vartheta \Bigg\} = 0
\end{aligned}
\right\} \quad (4).
$$

Aus diesem Ausdruck kann man die Differentialgleichung des Problemes wie die Übergangsbedingungen an den Kreisbogen mit den Radien $R_1, R_2, \ldots R_{n-1}$ und die Randbedingungen sowohl für den schlichten wie für den abgestuften Kreisring, Kreissektor und den Kreisringsektor gewinnen. Hier soll nur auf die Bestimmung der Beullast der abgestuften Kreisplatte eingegangen werden, für die sich ebenso wie für den Kreisring exakt ohne Anwendung von Näherungsmethoden eine transzendente Gleichung ergibt, deren kleinste Wurzel sich etwa durch Eingabeln bestimmen läßt. In diesem Falle werden die Werte der eckigen Klammern in dem zweiten, vierten und fünften Integral der Gl. (4) für die obere Grenze $\vartheta = \Theta = 2\pi$ und für die untere Grenze $\vartheta = 0$ einander gleich, so daß diese Integrale aus dem Ausdruck herausfallen.

2. Ableitung von Gleichung, Übergangs- und Randbedingungen. Eine Kreisplatte kann als Ganzes nach einer Seite hin ausbeulen oder auch mit Knotenlinien, so daß einzelne Teile der Platte auf der einen, andere auf der anderen Seite der ursprünglichen Plattenebene liegen. Die Rechnung zeigt nun, daß sich im ersten Falle die kleinste Beullast ergibt. In diesem Fall ist die Beulfläche achsialsymmetrisch, d. h. w_m wird von ϑ unabhängig. Alle Ableitungen nach ϑ in Gl. (4) werden also gleich Null, die Integrationen nach ϑ lassen sich ausführen und ergeben den Faktor 2π. Beachtet man das, so ergibt sich aus der Gl. (4) die folgende

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \delta J = & \sum_{m=1}^{n} B_m \left[\frac{d \delta w_m}{d r} \left\{\frac{d}{d r}\left(r \frac{d w_m}{d r}\right) - (1-\mu) \frac{d w_m}{d r}\right\}\right]_{R_{m-1}}^{R_m} \\
& - \sum_{m=1}^{n} B_m \left[\delta w_m \left\{r \frac{d}{d r}\left[\frac{1}{r} \frac{d}{d r}\left(r \frac{d w_m}{d r}\right)\right] + \lambda_m^2 r \frac{d w_m}{d r}\right\}\right]_{R_{m-1}}^{R_m} \\
& + \sum_{m=1}^{n} B_m \int_{R_{m-1}}^{R_m} \delta w_m \left\{\frac{d}{d r}\left(r \frac{d}{d r}\left[\frac{1}{r} \frac{d}{d r}\left(r \frac{d w_m}{d r}\right)\right]\right) + \lambda_m^2 \frac{d}{d r}\left(r \frac{d w_m}{d r}\right)\right\} d r = 0
\end{aligned}
\right\} \quad . \; . \; . \quad (5).
$$

Da die δw_m innerhalb der einzelnen Kreisringe ganz beliebig sein können, so müssen, wenn $\delta J = 0$ werden soll, in den Integralen die Faktoren von δw_m Null werden; das gibt für die n Variablen w_m n Gleichungen

$$
\frac{d}{d r}\left\{r \frac{d}{d r}\left[\frac{1}{r} \frac{d}{d r}\left(r \frac{d w_m}{d r}\right)\right]\right\} + \lambda_m^2 \frac{d}{d r}\left(r \frac{d w_m}{d r}\right) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6).
$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichungen lautet

$$
w_m = A_m J_0(\lambda_m r) + C_m N_0(\lambda_m r) + D_m \ln r + E_m \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7),
$$

wo J_0 die Besselsche, N_0 die Neumannsche Zylinderfunktion nullter Ordnung ist.

Aus der Gl. (5) folgen aber außerdem noch die Übergangsbedingungen zwischen den einzelnen Kreisringen und die Randbedingungen. An den Übergangsstellen, an denen

sich die Plattendicke sprungweise ändert, darf die Platte weder einen Riß noch einen Knick haben, d. h. es muß

$$\left.\begin{aligned} &\text{I.} \quad w_m - w_{m+1} = 0 \\ &\text{II.} \quad \frac{d\,w_m}{d\,r} - \frac{d\,w_{m+1}}{d\,r} = 0 \end{aligned}\right\} \text{ für } r = R_m$$

sein. Die gleiche Bedingung muß natürlich für alle konkurrenzfähigen Funktionen bestehen. Es muß also auch

$$\delta\,w_m = \delta\,w_{m+1} \qquad \text{und} \qquad \frac{d\,\delta\,w_m}{d\,r} = \frac{d\,\delta\,w_{m+1}}{d\,r} \qquad \text{für } r = R_m \text{ sein.}$$

Im übrigen können diese Größen beliebig sein. Soll also $\delta J = 0$ werden, so muß daher für $r = R_m$ der Faktor von $\delta\,w_m$ in Gl. (5) gleich dem negativen Faktor von $\delta\,w_{m+1}$ sein usw. Das gibt die beiden weiteren Bedingungen, daß für $r = R_m$

$$\text{III.} \quad B_m \left\{\frac{d}{d\,r}\left(r\,\frac{d\,w_m}{d\,r}\right) - (1-\mu)\,\frac{d\,w_m}{d\,r}\right\} = B_{m+1}\left\{\frac{d}{d\,r}\left(r\,\frac{d\,w_{m+1}}{d\,r}\right) - (1-\mu)\,\frac{d\,w_{m+1}}{d\,r}\right\},$$

$$\text{IV.} \quad B_m \left\{r\,\frac{d}{d\,r}\left[\frac{1}{r}\,\frac{d}{d\,r}\left(r\,\frac{d\,w_m}{d\,r}\right)\right] + \lambda_m^2\,r\,\frac{d\,w_m}{d\,r}\right\} = B_{m+1}\left\{r\,\frac{d}{d\,r}\left[\frac{1}{r}\,\frac{d}{d\,r}\left(r\,\frac{d\,w_{m+1}}{d\,r}\right)\right] + \lambda^2_{m+1}\,r\,\frac{d\,w_{m+1}}{d\,r}\right\},$$

d. h. daß sich die Biegemomente und Scherkräfte an den Sprungstellen stetig ändern. Diese $4(n-1)$ Übergangsbedingungen ergeben, wenn man die Lösung (7) der Gl. (6) einsetzt und die für die Zylinderfunktionen nullter Ordnung Z_0 und erster Ordnung Z_1 geltenden Gleichungen

$$\frac{d\,Z_0(\lambda\,r)}{d\,r} = -\lambda\,Z_1(\lambda\,r); \qquad \frac{d\,(r\,Z_1(\lambda\,r))}{d\,r} = \lambda\,r\,Z_0(\lambda\,r)$$

beachtet, die folgenden vier Übergangsbedingungen:

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & A_m\,J_0(\lambda_m\,R_m) + C_m\,N_0(\lambda_m\,R_m) + D_m \ln R_m + E_m \\ & = A_{m+1}\,J_0(\lambda_{m+1}\,R_m) + C_{m+1}\,N_0(\lambda_{m+1}\,R_m) + D_{m+1} \ln R_m + E_{m+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II.} \quad & -A_m\,\lambda_m\,J_1(\lambda_m\,R_m) - C_m\,\lambda_m\,N_1(\lambda_m\,R_m) + \frac{D_m}{R_m} \\ & = -A_{m+1}\,\lambda_{m+1}\,J_1(\lambda_{m+1}\,R_m) - C_{m+1}\,\lambda_{m+1}\,N_1(\lambda_{m+1}\,R_m) + \frac{D_{m+1}}{R_m} \end{aligned}$$

$$\text{III.} \left\{\begin{aligned} & -B_m\,\lambda_m^2\,R_m\,\{A_m\,J_0(\lambda_m\,R_m) + C_m\,N_0(\lambda_m\,R_m)\} \\ & + B_m(1-\mu)\left\{A_m\,\lambda_m\,J_1(\lambda_m\,R_m) + C_m\,\lambda_m\,N_1(\lambda_m\,R_m) - \frac{D_m}{R_m}\right\} \\ & = -B_{m+1}\,\lambda^2_{m+1}\,R_m\,\{A_{m+1}\,J_0(\lambda_{m+1}\,R_m) + C_{m+1}\,N_0(\lambda_{m+1}\,R_m)\} \\ & + B_{m+1}(1-\mu)\left\{A_{m+1}\,\lambda_{m+1}\,J_1(\lambda_{m+1}\,R_m) + C_{m+1}\,\lambda_{m+1}\,N_1(\lambda_{m+1}\,R_m) - \frac{D_{m+1}}{R_m}\right\} \end{aligned}\right.$$

$$\text{IV.} \qquad H_m\,D_m = H_{m+1}\,D_{m+1},$$

wo in der letzten Gleichung für $B_m\,\lambda_m^2 = H_m$ gesetzt ist. Dazu kommen weiter die Bedingungen für $r = 0$ also im Plattenmittelpunkt. Da hier w_1 nicht vorgeschrieben ist, kann $\delta\,w_1$ einen beliebigen Wert haben, soll also $\delta J = 0$ werden, muß in Gl. (5) der Faktor von $\delta\,w_1$ Null sein, d. h. es muß

$$D_1\,H_1 = 0$$

sein. Da aber H_1 nicht Null sein kann, muß $D_1 = 0$ sein, und folglich müssen nach Gleichung IV sämtliche $D_m = 0$ werden. Ferner ist für $r = 0$

$$\frac{d\,w_1}{d\,r} = -A_1\,\lambda_1\,J_1(0) - C_1\,\lambda_1\,N_1(0) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8).$$

Da $J_1(0) = 0$ ist, während $N_1(0) = \infty$ wird, muß, damit (8) erfüllt wird, $C_1 = 0$ werden. Da $J_0(0) = 1$ ist, wird somit

$$A_1 + E_1 = 0\,.$$

Der äußere Rand der Platte kann entweder eingespannt sein, dann ist für $r = R_n$

$$\left.\begin{aligned} & w_n(R_n) = A_n\,J_0(\lambda_n\,R_n) + C_n\,N_0(\lambda_n\,R_n) + E_n = 0 \\ & \frac{d\,w_n(R_n)}{d\,r} = -A_n\,\lambda_n\,J_1(\lambda_n\,R_n) - C_n\,\lambda_n\,N_1(\lambda_n\,R_n) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (9),$$

oder er kann drehbar gelagert sein, dann ist für $r = R_n$

$$\left.\begin{aligned} & w_n(R_n) = A_n J_0(\lambda_n R_n) + C_n N_0(\lambda_n R_n) + E_n = 0 \\ & B_n \left[\frac{d}{dr}\left(r \frac{dw}{dr}\right) - (1-\mu)\frac{dw_n}{dr}\right]_{r=R_n} \\ = {} & B_n \lambda_n [A_n \{\lambda_n R_n J_0(\lambda_n R_n) - (1-\mu) J_1(\lambda_n R_n)\} + C_n \{\lambda_n R_n N_0(\lambda_n R_n) - (1-\mu) N_1(\lambda_n R_n)\}] = 0 \end{aligned}\right\} \quad (10).$$

Da die D_m gleich Null sind, hat man also $3n$ Konstanten A_m, C_m und E_m und zur Bestimmung dieser Konstanten die $3(n-1)$ Übergangsbedingungen I, II und III und die 3 Randbedingungen (8) und (9) bzw. (10). Das sind $3n$ homogene Gleichungen für $3n$ Unbekannte. Diese haben außer der Lösung $A_m = C_m = E_m = 0$ nur dann eine von Null verschiedene Lösung, wenn die Koeffizientendeterminante gleich Null ist, d. h. nur dann ist die ausgebeulte Lage eine Gleichgewichtslage. Um aus dieser Determinante die Beullast ausrechnen zu können, muß man annehmen, daß alle P_m sich z. B. durch P_n ausdrücken lassen, daß sie also etwa zu P_n proportional sind. Im allgemeinen wird es so sein, daß nur am äußeren Plattenrande Kräfte angreifen, daß also nur P_n von Null verschieden ist. Dann sind

$$H_1 = H_2 = \ldots, \qquad = H_n = P_n \quad \text{und} \quad \lambda_m{}^2 = \frac{P_n}{B_m},$$

so daß sich also die verschiedenen $\lambda_m{}^2$ umgekehrt wie die dritten Potenzen der entsprechenden Plattendicke verhalten.

3. Die einmal abgestufte Kreisplatte. Diese Determinante soll nun nicht allgemein hingeschrieben werden, sondern nur für die einmal abgestufte Kreisplatte. In diesem Falle ist R_2 der Radius der Platte und R_1 der Radius des Kreises, an dessen Umfang die Dickenänderung stattfindet. Für die eingespannte Platte erhält man dann

$$\begin{array}{ccccc} A_1 & E_1 & A_2 & C_2 & E_2 \\ \left|\begin{matrix} J_0(\lambda_1 R_1) \\ -\lambda_1 J_1(\lambda_1 R_1) \\ \left[\begin{matrix} B_1\{\lambda_1{}^2 R_1 J_0(\lambda_1 R_1) \\ -(1-\mu)\lambda_1 J_1(\lambda_1 R_1)\} \end{matrix}\right] \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} -J_0(\lambda_2 R_1) \\ +\lambda_2 J_1(\lambda_2 R_1) \\ \left[\begin{matrix} -B_2\{\lambda_2{}^2 R_1 J_0(\lambda_2 R_1) \\ -(1-\mu)\lambda_2 J_1(\lambda_2 R_1)\} \end{matrix}\right] \\ J_0(\lambda_2 R_2) \\ -\lambda_2 J_1(\lambda_2 R_2) \end{matrix} & \begin{matrix} -N_0(\lambda_2 R_1) \\ +\lambda_2 N_1(\lambda_2 R_1) \\ \left[\begin{matrix} -B_2\{\lambda_2{}^2 R_1 N_0(\lambda_2 R_1) \\ -(1-\mu)\lambda_2 N_1(\lambda_2 R_1)\} \end{matrix}\right] \\ N_0(\lambda_2 R_2) \\ -\lambda_2 N_1(\lambda_2 R_2) \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}\right| = 0, \end{array}$$

wo über den einzelnen Spalten die Koeffizienten angegeben sind, deren Faktoren in der betreffenden Spalte stehen. Da in der zweiten Spalte nur in der ersten Zeile eine Eins, in den anderen nur Nullen stehen, kann diese Spalte und die erste Zeile fortgelassen werden. Dann steht in der letzten Spalte nur in der vorletzten Zeile eine Eins, sonst nur Nullen; auch diese Spalte und Zeile kann also fortgelassen werden. Genau so kann man bei der allgemeinen $(3n-1)$-reihigen Determinante alle Spalten, die Faktoren von E_m enthalten, fortlassen und alle ersten Zeilen jeder Gruppe, so daß nur eine $(2n-1)$-reihige Determinante überbleibt. Rechnet man die hier bleibende Determinante aus und setzt für B_1 und B_2 die Werte ein, erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned} & \{(h_2{}^3 - h_1{}^3)(1-\mu) J_1(\lambda_1 R_1) + h_1{}^3 \lambda_1 R_1 J_0(\lambda_1 R_1)\} \{J_1(\lambda_2 R_1) N_1(\lambda_2 R_2) - J_1(\lambda_2 R_2) N_1(\lambda_2 R_1)\} \\ & \qquad + h_2{}^3 \lambda_2 R_1 J_1(\lambda_1 R_1) \{J_1(\lambda_2 R_2) N_0(\lambda_2 R_1) - J_0(\lambda_2 R_1) N_1(\lambda_2 R_2)\} = 0, \end{aligned}$$

die sich am einfachsten durch Eingabeln lösen läßt. Für den Fall der schlichten Platte ohne Stufe, d. h. $h_2 = h_1 = h$ erhält man

$$J_1(\lambda R) = 0,$$

also

$$\lambda R = 3{,}832 \quad \text{und daraus} \quad P = 14{,}65 \frac{G}{6(1-\mu)} \frac{h^3}{R^2}.$$

Um einen Überblick über die Wirkung einer solchen Verstärkung zu haben, ist für den Fall, daß die Platte an den verstärkten Stellen die doppelte Dicke hat, in Bild 2 bei Verstärkung von der Mitte aus $(h_1 = 2h_2)$ unter der Annahme, daß nur am äußeren Rande überall die gleichen Druckkräfte angreifen, die Beullast als Funktion des Radius der Sprunglinie aufgetragen und zwar für die beiden Querkontraktionszahlen $\mu = 0$ und $\mu = 0{,}3$. Dabei ist die Knicklast der unverstärkten Platte gleich 1 gesetzt, die der voll verstärkten also gleich 8. Außerdem gibt die gestrichelte Kurve die Beullast für den Fall, daß die Masse der Verstärkung bis zu dem betreffenden Radius gleichmäßig zur Verstärkung der ganzen Platte ausgenutzt ist.

Man sieht, daß die abgestufte Platte etwa bis $R_1 = 0{,}7\,R$ um ein geringes biegungssteifer ist. Bild 3 gibt die Beullast, falls die Verstärkung vom Rande aus bis zu dem betreffenden Wert von R reicht ($h_2 = 2\,h_1$). Eine solche ringförmige Verstärkung gibt also immer eine geringere Beullast als die Platte, bei der das für die Stufe gebrauchte Material für eine durchgehende Verstärkung der ganzen Platte verwendet wurde (gestrichelte Kurve).

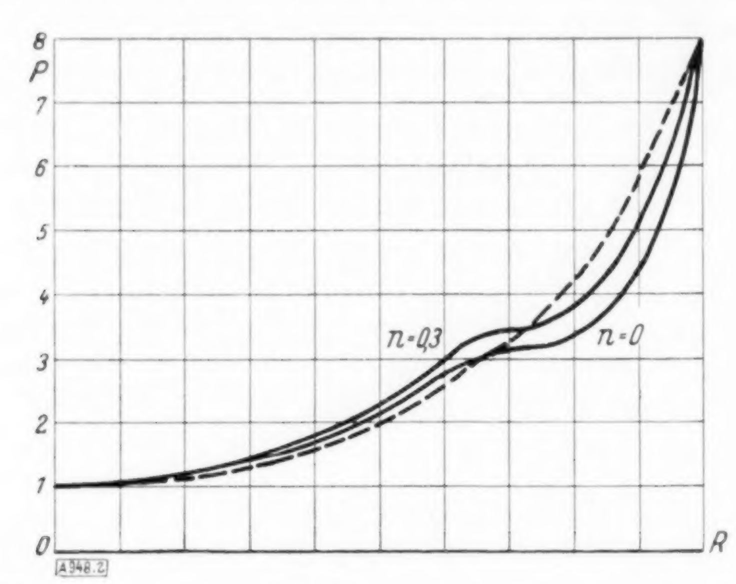


Bild 2. Eingespannte Platte, Verstärkung von der Mitte aus.

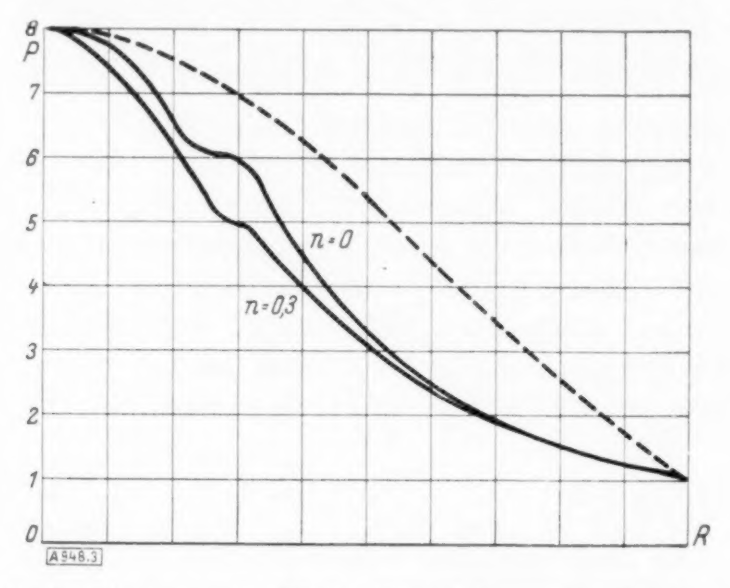


Bild 3. Eingespannte Platte, Verstärkung vom Rande aus.

Bei drehbar gelagertem Plattenrand wird die letzte Zeile der Determinante anders. Es kommt dafür statt der zweiten Gl. (9) die zweite Gl. (10) in Frage. Die Ausrechnung der Determinante, in der die gleichen Zeilen und Spalten gestrichen werden können, gibt dann

$$\begin{aligned} & h_2^6 \lambda_2^2 R_1 R_2 J_1(\lambda_1 R_1) \{J_0(\lambda_2 R_1) N_0(\lambda_2 R_2) - J_0(\lambda_2 R_2) N_0(\lambda_2 R_1)\} + \{h_1^3 h_2^3 \lambda_1 \lambda_2 R_1 R_2 J_0(\lambda_1 R_1) \\ & - (1-\mu) h_2^3 (h_1^3 - h_2^3) \lambda_2 R_2 J_1(\lambda_1 R_1)\} \{J_0(\lambda_2 R_2) N_1(\lambda_2 R_1) - J_1(\lambda_2 R_1) N_0(\lambda_2 R_2)\} \\ & - (1-\mu) h_2^6 \lambda_2 R_1 J_1(\lambda_1 R_1) \{J_0(\lambda_2 R_1) N_1(\lambda_2 R_2) - J_1(\lambda_2 R_2) N_0(\lambda_1 R_1)\} - \{(1-\mu) h_1^3 h_2^3 \lambda_1 R_1 J_0(\lambda_1 R_1) \\ & - (1-\mu)^2 h_2^3 (h_1^3 - h_2^3) J_1(\lambda_1 R_1)\} \{J_1(\lambda_2 R_2) N_1(\lambda_2 R_1) - J_1(\lambda_2 R_1) N_1(\lambda_2 R_2)\} = 0 \end{aligned}$$

eine Gleichung, deren Nullstellen für verschiedene R_1 bei Verstärkung von der Mitte aus ($h_1 = 2\,h_2$) und ringförmiger Verstärkung vom Rande aus ($h_2 = 2\,h_1$) durch Eingabeln genähert bestimmt wurden. Dabei wurden ebenso, wie im Falle der eingespannten Platte, alle Rechnungen mit dem Rechenschieber ausgeführt. Die Ergebnisse zeigen Bild 4 und 5. Bei Verstärkung von der Mitte aus (Bild 4) liegen bei der abgestuften Platte die Beullasten durchgehend höher als bei gleichmäßiger Verteilung des Materials der Verstärkung über die ganze Platte (gestrichelte Kurve). Im Falle der ringförmigen Verstärkung vom Rande aus ist dagegen stets die durchgehend verstärkte Platte bei der gleichen Materialmenge beulsicherer (gestrichelte Kurve in Bild 5).

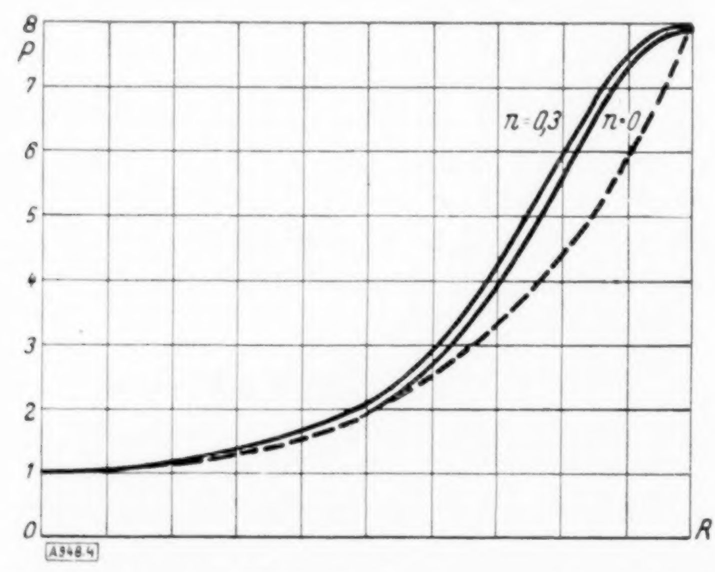


Bild 4. Gelagerte Platte, Verstärkung von der Mitte aus.

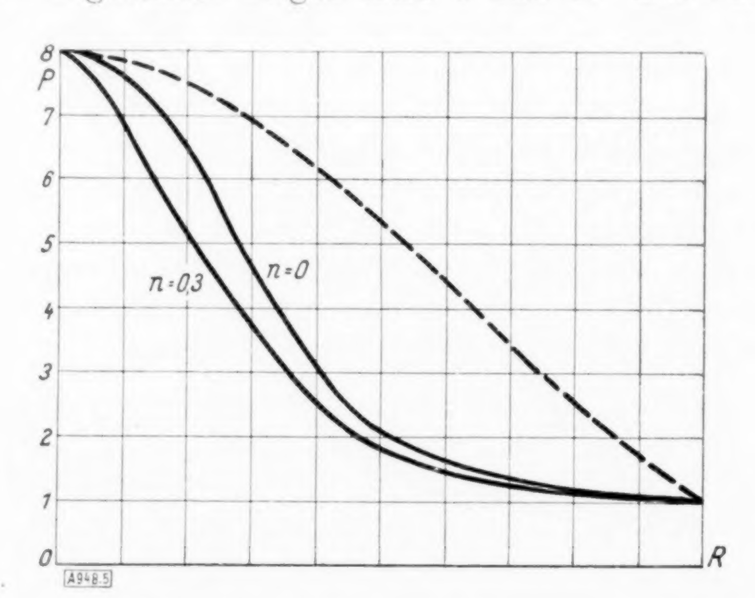


Bild 5. Gelagerte Platte, Verstärkung vom Rande aus.

4. Zusammenfassung. Aus dem Ausdruck für die potentielle Energie einer ausgebeulten, mehrfach abgestuften Kreisplatte werden die Differentialgleichung für das Ausbeulen, die Übergangsbedingungen an den Sprungstellen und die Randbedingungen für die eingespannte und für die drehbar gelagerte Platte abgeleitet. Für den Fall der einmal gestuften Kreisplatte wird bei einer Verstärkung auf das Doppelte, die Wirkung dieser Verstärkung im einzelnen untersucht. 948

Die kleinen Schwingungen eines stark durchhängenden Seiles.

Von *Hans Seitter* in Wien.

1. Ein vollkommen biegsames, unausdehnbares, gewichtsloses Seil von der Länge $2s_0$ ist mit seinen Enden an zwei in einer Waagrechten liegenden, um $2x_0$ entfernten Lagern reibungsfrei befestigt. Es ist derart lotrecht belastet, daß seine Gleichgewichtsform symmetrisch und stetig gekrümmt ist (Bild 1)[1]). Das Seil werde nun derart aus dieser Gleichgewichtslage herausgebracht, daß es, wieder sich selbst überlassen, um die Ruhelage ebene Schwingungen ausführt, die gegenüber den sonstigen Abmessungen sehr klein und ebenfalls symmetrisch sein sollen. Auf die Berücksichtigung von Dämpfungseinflüssen wird verzichtet. Es ist der zeitliche und örtliche Verlauf dieser Eigenschwingungen, insbesondere die Frequenz der „Grundschwingung" zu bestimmen.

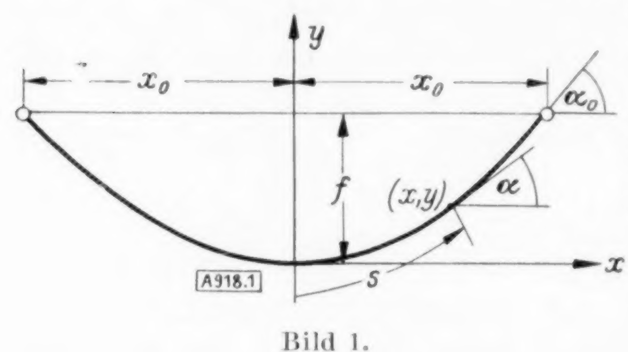


Bild 1.

Wieweit die Wirklichkeit diesen idealisierenden Annahmen nahekommt, hängt auch bei sehr dünnen und biegsamen Seilen oder Ketten mit großem Elastizitätsmodul E wesentlich vom Durchhang f ab. Ist der Durchhang klein oder mit anderen Worten das Seil „stark gespannt", dann wird auch bei sehr großem E die Elastizität von Einfluß sein, ja beim Grenzfall der unbelasteten schwingenden Saite ist die Annahme der Unausdehnbarkeit überhaupt sinnwidrig. Die meisten Arbeiten über diesen Gegenstand befassen sich mit den Schwingungen wenig durchhängender Seile und nehmen dabei folgerichtig das Seil als elastisch an[2]).

Bei stärker durchhängenden Seilen und genügend großem Elastizitätsmodul — oder entsprechend kleiner Belastung — wird hingegen die Annahme der Unausdehnbarkeit unbedenklich sein; anderseits ist aber auf Vernachlässigungen zu achten, die bei wenig durchhängenden Seilen wohl erlaubt sind, wie Annahme einer durch die Schwingung nicht beeinflußten konstanten Seilspannung oder Vernachlässigung der Horizontalschwingungen u. ä.

Es werden im folgenden Schwingungsform und Schwingungszahlen unter den obigen Annahmen angegeben, wobei jede beliebige Genauigkeit erreicht werden kann. Als Beispiel für die angegebene Methode wird das längs seiner Länge gleichmäßig belastete Seil (das homogene Seil) behandelt.

2. Legt man ein kartesisches Koordinatensystem wie es Bild 1 zeigt, so ist die Lage eines Punktes der Seilkurve im Ruhezustand durch x und y beschrieben; in der Bewegung hat der gleiche Punkt dann die Koordinaten $x+\xi$ und $y+\eta$. Die Tangente an die Seilkurve schließt im Punkt x, y mit der positiven x-Richtung in der Ruhe den Winkel α ein, in der Bewegung den Winkel $\alpha+\varphi$. Die Seilspannkraft ist im Gleichgewicht S, in der Bewegung $S+U$. Schließlich sei der Krümmungsradius der Gleichgewichtsfigur mit ϱ, die Belastung der Längeneinheit mit q, die Schwerebeschleunigung mit g bezeichnet. Die Werte für ϱ, q und S an der tiefsten Stelle der Seillinie, d. i. für $x=0$, sind beziehungsweise ϱ_0, q_0 und S_0.

Die Zuwächse ξ, η, φ und U sind voraussetzungsgemäß gegen die ursprünglichen Größen klein. Sie sind Funktionen des Ortes und der Zeit t.

Die Größen x, y, α, S, ϱ und q sind durch die Gleichgewichts- und die geometrischen Bedingungen miteinander verknüpft. Ist etwa die Belastung q als Funktion der Seillänge s — die vom tiefsten Punkt an gezählt werden soll — gegeben, so gelten die bekannten Beziehungen

$$\frac{d}{ds}(S\cos\alpha)=0, \qquad \frac{d}{ds}(S\sin\alpha)=q \quad \ldots \ldots \quad (1).$$

Durch deren Integration erhält man α und S als Funktionen von s:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{S_0}\int_0^s q(s)\,ds \quad \ldots \ldots \quad (2),$$

$$S=\frac{S_0}{\cos\alpha} \quad \text{und weiter} \quad x=\int_0^s\cos\alpha\,ds, \qquad y=\int_0^s\sin\alpha\,ds, \qquad \varrho=\frac{1}{\frac{d\alpha}{ds}}.$$

[1]) Diese Voraussetzung wird noch schärfer gefaßt werden.

[2]) Z. B. K. Wolf: Schwingungen elastischer Seile, Z. angew. Math. Mech., Bd. 7 (1927), S. 137 ff.

Es erweist sich nun als zweckmäßig, auf den Winkel α als unabhängige Veränderliche überzugehen. Aus (2) erhält man

$$s = f(\alpha), \qquad ds = f'(\alpha)\, d\alpha = \varrho\, d\alpha,$$

damit also

$$\varrho = f'(\alpha) \quad \ldots \ldots \quad (3).$$

Schreibt man (1) in der Form

$$\frac{d}{d\alpha}(S\cos\alpha) = 0, \qquad \frac{1}{\varrho}\cdot\frac{d}{d\alpha}(S\sin\alpha) = q, \quad \text{so folgt} \quad \frac{1}{\varrho}\cdot\frac{d}{d\alpha}(S_0 \operatorname{tg}\alpha) = q, \qquad q = \frac{S_0}{\varrho}\,\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

und schließlich erhält man daraus für $\alpha = 0$ die bekannte Beziehung

$$S_0 = \varrho_0\, q_0 \quad \ldots \ldots \quad (4).$$

3. Der Schwingungsvorgang wird durch das folgende System von Gleichungen beschrieben[3]):

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\cos\alpha}{\varrho}\, g \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} + 4\varphi\right) \quad \ldots \ldots \quad (5),$$

$$\xi = -\int \varrho\,\varphi \sin\alpha\, d\alpha \quad \ldots \ldots \quad (6),$$

$$\eta = \int \varrho\,\varphi \cos\alpha\, d\alpha + B \quad \ldots \ldots \quad (7),$$

$$U = \frac{\varrho_0 q_0}{\cos\alpha}\left(2\int \varphi\, d\alpha + D\right) \quad \ldots \ldots \quad (8).$$

B und D sind unbekannte Funktionen von t. Zwischen ihnen besteht die Beziehung

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\,\frac{1}{\cos^2\alpha} = g\,\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\varphi + \frac{1}{\varrho_0 q_0}\, U \sin\alpha\right) \quad \ldots \ldots \quad (9).$$

Die Randbedingungen sind, wenn α_0 den Tangentenwinkel am Auflager bezeichnet:

für $\alpha = \pm\alpha_0$ muß sein $\xi = 0$ und $\eta = 0$,

und für $\alpha = 0$ muß zu jeder Zeit $\xi = 0$ und $\varphi = 0$ sein.

Sind schließlich noch in jenem Zeitpunkt, ab welchem t gezählt wird, φ und $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ in ihrer Abhängigkeit von α gegeben — Symmetrie bezüglich der y-Achse ist Voraussetzung, — so ist der Schwingungsvorgang eindeutig festgelegt.

4. Es kommt also im wesentlichen darauf an, die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung (5) zu integrieren, d. h. $\varphi(\alpha, t)$ unter Erfüllung der Randbedingungen anzugeben. Setzt man

$$\varphi(\alpha, t) = u(t)\cdot v(\alpha) \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

und bezeichnet λ einen Parameter, dann erhält man statt (5) zwei gewöhnliche Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \lambda u = 0 \quad \ldots \ldots \quad (11),$$

$$\frac{d^2 v}{d\alpha^2} + v\left(4 + \frac{\varrho}{\cos\alpha}\cdot\frac{\lambda}{g}\right) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (12).$$

Die Lösung von (11) ist sofort angebbar

$$u = E\sin\sqrt{\lambda}\, t + F\cos\sqrt{\lambda}\, t \quad \ldots \ldots \quad (13).$$

Es soll angenommen werden, daß $\frac{\varrho}{\cos\alpha}$ in eine Potenzreihe nach α entwickelbar ist, welche für $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$ konvergiert[4]). Das bedeutet keine Beschränkung der Allgemeinheit, denn $\alpha = \frac{\pi}{2}$ kann bei nur lotrecht belasteten Seilen nur dann vorkommen, wenn die Belastung unendlich groß wird. Dann wächst aber auch die Seilspannkraft über alle Grenzen; dieser Fall ist daher auszuschließen.

[3]) E. J. Routh: Die Dynamik der Systeme starrer Körper, übersetzt von A. Schepp. Leipzig 1898, 2. Bd., S. 459 ff.

[4]) Vgl. Fußnote [1]).

Die Lösung von (12) wird durch eine Potenzreihe dargestellt:

$$v = \sum_{k=0}^{k=\infty} a_k \cdot a^k \qquad (14),$$

deren Koeffizienten bis auf zwei durch Vergleichung gefunden sind. Aus der Bedingung: für $a=0$ muß $\varphi=0$ sein, folgt, daß sämtliche Koeffizienten bei den geraden Potenzen gleich Null sind, φ und damit v daher eine ungerade Funktion von a ist, was auch unmittelbar die Anschauung ergibt. Ein Koeffizient, etwa a_1, bleibt neben λ noch unbestimmt. Die lösende Reihe ist auch gleichmäßig konvergent[5]).

Die Randbedingung: für $a=a_0$ ist stets $\xi=0$, geht durch Berücksichtigung von (6) und (10) über in:

$$\int \varrho \cdot v \cdot \sin a \, d a \,\Big|_{a=a_0} = 0 \qquad (15).$$

Man setze ϱ und $\sin a$ in Potenzreihen entwickelt ein und integriere gliedweise, was wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $\varrho \cdot v \cdot \sin a$ in diesem Bereich erlaubt ist. Nach Ersetzung von a durch a_0 erhält man eine Gleichung in λ vom Grade unendlich; deren Lösungen λ_i — $(i=1, 2, \ldots, \infty)$ — sind die „Eigenwerte" des Problems. Über die Auflösung dieser Gleichung wird an Hand eines Beispieles noch gesprochen werden.

Nach (10), (13) und dem vorigen ist daher φ:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{i=\infty} (E_i \cdot \sin \sqrt{\lambda_i} \cdot t + F_i \cdot \cos \sqrt{\lambda_i} \cdot t) \cdot v(a, \lambda_i) = \sum_{i=1}^{i=\infty} u_i \cdot v_i \qquad (16).$$

Unbestimmt sind noch die E_i und F_i und a_1.

5. Da φ bekannt ist, kann nach (6) auch ξ angegeben werden. Um η bestimmen zu können, muß noch B berechnet werden. Das gelingt durch Erfüllung der Randbedingung für η nach (7):

$$B = -\int \varrho \varphi \cos a \, d a \,\Big|_{a=a_0} \qquad (17).$$

B ist also eine Konstante.

In dem Ausdruck (8) für U ist D noch zu bestimmen. Durch Benützung von (9) und (17) erhält man nach kurzer Rechnung:

$$2 \int \varphi \, d a + D = \frac{1}{g} \int \varrho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \cos a \, d a - \cos^2 a \frac{\partial \varphi}{\partial a} - 2 \varphi \cdot \sin a \cdot \cos a \qquad (18).$$

Es folgt nun eine Zusammenstellung der Ergebnisse unter der Annahme, daß $\varphi_i = u_i \cdot v_i$ bekannt ist:

$$\xi = -\sum_{i=1}^{i=\infty} u_i \int \varrho \cdot v_i \sin a \, d a \qquad (19),$$

$$\eta = \sum_{i=1}^{i=\infty} u_i \left[\int \varrho \cdot v_i \cos a \, d a - \int \varrho \cdot v_i \cos a \, d a \,\Big|_{a=a_0} \right] \qquad (20),$$

$$U = -\varrho_0 q_0 \sum_{i=1}^{i=\infty} u_i \left[\frac{\lambda_i}{g \cos a} \int \varrho \, v_i \cos^2 a \, d a + \cos a \frac{d v_i}{d a} + 2 \sin a \cdot v_i \right] \qquad (21).$$

Die Anfangsbedingungen erfordern die Angabe von φ und $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ für $t=0$:

$$\varphi(a, 0) = \sum_{i=1}^{i=\infty} F_i \cdot v_i \qquad (22),$$

$$\frac{\partial \varphi(a, 0)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{i=\infty} E_i \cdot \sqrt{\lambda_i} \cdot v_i \qquad (23).$$

Sind diese Funktionen gegeben — sie können aus Symmetriegründen nur ungerade Funktionen von a sein —, so sind auch die E_i und F_i und a_1 bekannt und die Aufgabe ist vollständig gelöst.

[5]) Vgl. z. B. Hoheisel: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Sammlung Göschen, Berlin und Leipzig 1926.

7. Beispiel. Ein homogenes Seil habe die Länge $2 s_0$ und die Längeneinheit das Gewicht q_0.

Die Gl. (2) lautet nun

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{S_0} \int_0^s q_0 \, d s = \frac{q_0}{S_0} s ;$$

daraus folgt:

$$s = \frac{S_0}{q_0} \operatorname{tg} \alpha, \qquad d s = \frac{S_0}{q_0} \frac{1}{\cos^2 \alpha} d \alpha = \varrho \, d \alpha, \qquad \varrho = \frac{S_0}{q_0} \frac{1}{\cos^2 \alpha} ;$$

berücksichtigt man noch (4), so erhält man schließlich

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{\cos^2 \alpha} \quad \text{(24).}$$

Ist, so wie hier, ϱ_0 nicht gegeben, so ist es aus den übrigen Angaben, wie Seillänge oder Durchhang, zu berechnen. Man kann folgendermaßen vorgehen:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{s^2}{\varrho_0^2}}} \quad \text{(25),}$$

$$x = \int_0^s \cos \alpha \, d s = \int_0^s \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{s^2}{\varrho_0^2}}} d s = \varrho_0 \, \mathfrak{Ar}\, \mathfrak{Sin} \frac{s}{\varrho_0} ;$$

aus der Gleichung

$$\mathfrak{Sin} \frac{x_0}{\varrho_0} = \frac{s_0}{\varrho_0} \quad \text{(26)}$$

läßt sich dann ϱ_0 bestimmen. Der noch benötigte Winkel α_0 ergibt sich aus (25)

$$\alpha_0 = \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{s_0^2}{\varrho_0^2}}} \quad \text{(27).}$$

Der Ausdruck $4 + \frac{\varrho}{\cos \alpha} \cdot \frac{\lambda}{g}$ in Gl. (12) geht über in $4 + \frac{\varrho_0}{\cos^3 \alpha} \frac{\lambda}{g}$; die Entwicklung in eine Potenzreihe ergibt:

$$4 + \frac{\varrho_0}{\cos^3 \alpha} \cdot \frac{\lambda}{g} = 4 + \frac{\varrho_0 \lambda}{g} + 3 \frac{\varrho_0 \lambda}{g} \frac{\alpha^2}{2!} + 33 \frac{\varrho_0 \lambda}{g} \frac{\alpha^4}{4!} + 723 \frac{\varrho_0 \lambda}{g} \frac{\alpha^6}{6!} + \cdots \quad \text{(28).}$$

Setzt man nach (14)

$$v = a_1 \alpha + a_3 \alpha^3 + a_5 \alpha^5 + a_7 \alpha^7 + a_9 \alpha^9 + \cdots \quad \text{(29),}$$

so ist

$$\frac{d^2 v}{d \alpha^2} = 2.3 \, a_3 \alpha + 4.5 \, a_5 \alpha^3 + 6.7 \, a_7 \alpha^5 + 8.9 \, a_9 \alpha^7 + \cdots \quad \text{(30).}$$

Die Entwicklungen (28), (29) und (30) werden in die Differentialgleichung (12) eingesetzt und die Koeffizienten verglichen; dadurch erhält man

$$\begin{aligned} v = a_1 \Big\{ \alpha &- \left[4 + \frac{\varrho_0 \lambda}{g}\right] \frac{\alpha^3}{3!} + \left[16 - \frac{\varrho_0 \lambda}{g} + \left(\frac{\varrho_0 \lambda}{g}\right)^2\right] \frac{\alpha^5}{5!} - \left[64 + 57 \frac{\varrho_0 \lambda}{g} - 27 \left(\frac{\varrho_0 \lambda}{g}\right)^2 + \left(\frac{\varrho_0 \lambda}{g}\right)^3\right] \frac{\alpha^7}{7!} \\ &+ \left[256 - 1157 \frac{\varrho_0 \lambda}{g} + 1167 \left(\frac{\varrho_0 \lambda}{g}\right)^2 - 86 \left(\frac{\varrho_0 \lambda}{g}\right)^3 + \left(\frac{\varrho_0 \lambda}{g}\right)^4\right] \frac{\alpha^9}{9!} - \cdots \Big\} \end{aligned} \quad \text{(31).}$$

Die Randbedingung (15) erfordert in diesem Fall

$$\int \frac{\varrho_0}{\cos^2 \alpha} v \sin \alpha \, d \alpha \Big|_{\alpha = \alpha_0} = 0 .$$

Das unbestimmte Integral wird wieder durch Reihenentwicklung bestimmt, wobei man vorteilhaft die Beziehung $\frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{d}{d \alpha} \left(\frac{1}{\cos \alpha} \right)$ verwendet. Man erhält damit schließlich die „Frequenzgleichung“

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{\alpha_0^3}{3!} &+ \left[4-4\frac{\varrho_0}{g}\lambda\right]\frac{\alpha_0^5}{5!} + \left[62-106\frac{\varrho_0}{g}\lambda+6\left(\frac{\varrho_0}{g}\lambda\right)^2\right]\frac{\alpha_0^7}{7!} \\ &+\left[1384-4152\frac{\varrho_0}{g}\lambda+496\left(\frac{\varrho_0}{g}\lambda\right)^2-8\left(\frac{\varrho_0}{g}\lambda\right)^3\right]\frac{\alpha_0^9}{9!} \\ &+\left[50522-227342\frac{\varrho_0}{g}\lambda+43242\left(\frac{\varrho_0}{g}\lambda\right)^2-1460\left(\frac{\varrho_0}{g}\lambda\right)^3+10\left(\frac{\varrho_0}{g}\lambda\right)^4\right]\frac{\alpha_0^{11}}{11!}+\cdots=0 \end{aligned}\right\} \quad (32).$$

Schreibt man sie in der Form

$$K_0+K_1\left(\frac{\varrho_0}{g}\lambda\right)+K_2\left(\frac{\varrho_0}{g}\lambda\right)^2+K_3\left(\frac{\varrho_0}{g}\lambda\right)^3+K_4\left(\frac{\varrho_0}{g}\lambda\right)^4+\cdots=0 \quad (33),$$

so bedeuten die einzelnen Koeffizienten:

$$\left.\begin{aligned} K_0 &= \frac{2}{3!}\alpha_0^3+\frac{4}{5!}\alpha_0^5+\frac{62}{7!}\alpha_0^7+\frac{1384}{9!}\alpha_0^9+\frac{50522}{11!}\alpha_0^{11}+\cdots \\ K_1 &= -\frac{4}{5!}\alpha_0^5-\frac{106}{7!}\alpha_0^7-\frac{4152}{9!}\alpha_0^9-\frac{227342}{11!}\alpha_0^{11}-\cdots \\ K_2 &= \frac{6}{7!}\alpha_0^7+\frac{496}{9!}\alpha_0^9+\frac{43242}{11!}\alpha_0^{11}+\cdots \\ K_3 &= -\frac{8}{9!}\alpha_0^9-\frac{1460}{11!}\alpha_0^{11}-\cdots \\ K_4 &= +\frac{10}{11!}\alpha_0^{11}+\cdots \end{aligned}\right\} \quad (34).$$

Die Auflösung dieser Gleichung gibt die Folge der Eigenwerte λ_i. Die Lösungen des Problems sind:

$$\varphi=\sum_{i=1}^{i=\infty}u_i\cdot v_i,$$

$$\xi=-\varrho_0\sum_{i=1}^{i=\infty}u_i\cdot\int v_i\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\,d\alpha,$$

$$\eta=\varrho_0\sum_{i=1}^{i=\infty}u_i\cdot\left[\int\frac{v_i}{\cos\alpha}\,d\alpha-\int\frac{v_i}{\cos\alpha}\,d\alpha\Big|_{\alpha=\alpha_0}\right],$$

$$U=-\varrho_0 q_0\sum_{i=1}^{i=\infty}u_i\cdot\left[\frac{\varrho_0\lambda_i}{g\cos\alpha}\int\frac{v_i}{\cos\alpha}\,d\alpha+\cos\alpha\frac{d v_i}{d\alpha}+2\sin\alpha\cdot v_i\right].$$

7. Es sind für ein homogenes Seil folgende Werte gegeben (Bild 1): $2x_0=200{,}0$ cm, $2s_0=209{,}4$ cm. Die Frequenz der Grundschwingung ist zu bestimmen.

ϱ_0 berechnet sich nach (26) zu $\varrho_0=191{,}5$ cm; α_0 nach (27) zu $\alpha_0=0{,}5000$. Die Frequenzgleichung (33) lautet mit diesem Wert:

$$\begin{aligned} 0{\cdot}0428126-0{\cdot}001231\left(\frac{\varrho_0}{g}\lambda\right)+0{\cdot}0000126\left(\frac{\varrho_0}{g}\lambda\right)^2-0{\cdot}00000007\left(\frac{\varrho_0}{g}\lambda\right)^3 \\ +0{\cdot}0000000001\left(\frac{\varrho_0}{g}\lambda\right)^4-\cdots=0. \end{aligned}$$

Die letzte Ziffer bei den einzelnen Koeffizienten ist unsicher. Der kleinste Wert von $\frac{\varrho_0}{g}\lambda$, der diese Gleichung befriedigt, liegt bei $\frac{\varrho_0}{g}\lambda_1=61$; wenn $g=981$ cm/sec² angenommen wird, ist $\lambda_1=61\cdot\frac{981}{191{\cdot}5}=312\ \text{sec}^{-2}$ und die Kreisfrequenz $\omega=\sqrt{\lambda_1}=17{\cdot}68\ \text{sec}^{-1}$. Schließlich erhält man leicht die Schwingungsdauer $T=\frac{2\pi}{\omega}=0{\cdot}356$ sec und die Anzahl der Schwingungen in der Zeiteinheit $\nu=\frac{1}{T}=2{,}81$ Hertz.

Resonanzschwingungen eines Systems bei vektorieller Überlagerung der erregenden Impulse.

Von *Gerhard Heinrich* in Wien.

Mitteilung aus dem Institut für Mechanik der Maschinenbauschule der Technischen Hochschule in Wien.

1. Einleitung. Es kommen in der Praxis Fälle von Schwingungen vor, bei denen die schwingungserregenden Impulse, als Vektoren aufgefaßt, ihre Richtung in bestimmter Weise mit der Zeit ändern. Dies tritt z. B. ein, wenn ein Schwungrad transversale Schwingungen ausführt, die von Stößen herrühren, die von zwei an beide Seiten des Rades anschließende Kurbeln übertragen werden, wobei jeder Arbeitshub angenähert durch einen Stoß ersetzt werden kann[1]). Setzt man näherungsweise unendlich lange Schubstange voraus, so erfolgen die Stöße, vom ruhenden Beobachter aus gesehen, immer in derselben Richtung. Die in die Radebene fallende Komponente der Drehstoßvektoren besitzt also ebenfalls immer dieselbe Richtung, während ihre Größe sich ändert. Es rotiert also, wenn das Schwungrad mit konstanter Winkelgeschwindigkeit umläuft, bezogen auf ein körperfestes Koordinatensystem, der Drehstoßvektor mit konstanter Winkelgeschwindigkeit.

Im folgenden sei ein rotationssymmetrischer Körper vorausgesetzt, der um jede beliebige, durch einen bestimmten Punkt 0 der Symmetrieachse hindurchgehende und zu dieser senkrechten Achse, Schwingungen gleicher Frequenz ausführen kann, wobei sich der Körper selbst starr verhält und die Schwingungen durch passende Federkräfte ermöglicht werden. Die Erregung der Schwingungen erfolge durch Drehstöße, deren Vektoren sämtlich in der Ebene E_n senkrecht zur Symmetrieachse durch den Punkt 0 liegen sollen. Es wirke in jedem Augenblick immer nur ein einziger Drehstoßvektor, der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit in der Ebene E_n rotieren soll, während seine Größe sich mit der Winkellage ändert. (Sie kann auch Null und negativ werden.)

2. Ermittlung der ungedämpften Resonanzschwingung.

a) Diskrete Einzelstöße. Es sei zunächst vorausgesetzt, daß nicht eine kontinuierliche Folge von kleinen Drehstößen stattfindet, sondern, daß diskrete Einzelstöße von beliebiger Größe in gleichen Zeitintervallen aufeinanderfolgen, deren Vektoren den Vollkreis in k gleiche Teile teilen und daß die erzeugten Schwingungen ungedämpft sind. Für das angezogene Beispiel bedeutet dies, daß man die Wirkung der Arbeitstakte auf die Anregung der Schwingung näherungsweise durch Einzelstöße ersetzt, die zu passenden Zeitpunkten stattfinden, wie dies in der zitierten Arbeit näher ausgeführt wird.

Ein einzelner Drehstoß erzeugt nun nach Voraussetzung eine ungedämpfte Schwingung um eine Schwingachse, die mit der Richtung des Drehstoßvektors zusammenfällt. Ist ϑ der als klein vorausgesetzte Auslenkungswinkel um die betrachtete Schwingachse, so gilt nach dem betrachteten Drehstoß:

$$\vartheta = c \cdot \sin \omega t \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

Hierbei ist c proportional der Größe des zur Zeit $t = 0$ erfolgten Drehstoßes, während ω von der Federkonstanten und den Trägheitsverhältnissen abhängt.

Man kann ϑ als der Größe nach mit der Zeit veränderlichen, der Richtung nach aber konstanten Verdrehungsvektor $\bar{\vartheta}$ auffassen. (Für seine Größe muß man dann allerdings auch Null und negative Werte zulassen.) Erfolgen nun in anderer Richtung noch weitere Stöße, so werden sich die zugehörigen Verdrehungen, da sie als klein vorausgesetzt sind, in jedem Augenblick vektoriell zu einer resultierenden Verdrehung zusammensetzen. Es ist nun zweckmäßig, alle Verdrehungsvektoren auf zwei zueinander senkrechte Richtungen zu projizieren.

Es sei a eine beliebige feste Richtung, auf die alle Verdrehungsvektoren $\bar{\vartheta}$ projiziert werden sollen (siehe Bild 1). Der erste Stoßvektor, der unter φ_1 gegen a geneigt sei und der zur

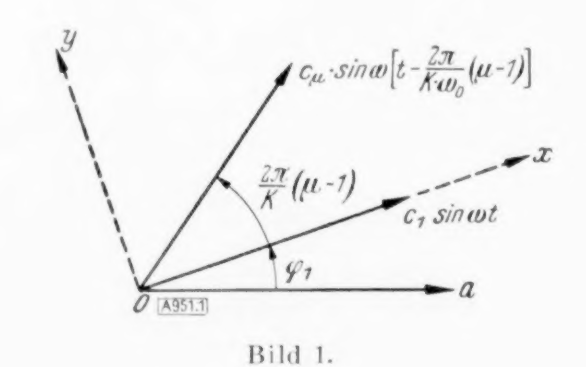


Bild 1.

[1]) G. Heinrich: Forsch. Ing.-Wes. Bd. 9 (1938), S. 177 ff.

Zeit $t=0$ auftreten soll, erzeuge eine Schwingung von der Amplitude c_1, die proportional der Größe des Drehstoßes gesetzt werden kann. Ist ω_0 die Winkelgeschwindigkeit der Drehung des Stoßvektors, k die Zahl der Stöße pro Umlauf, so findet der μ-te Stoß um die Zeit: $t_\mu = \frac{2\pi}{k\cdot\omega_0}(\mu-1)$ später statt wie der erste Stoß, und sein Vektor ist unter dem Winkel $\frac{2\pi(\mu-1)}{k}$ gegen den ersten Stoßvektor geneigt. Bedeutet nun $\vartheta_a^{(n)}(t)$ die Summe der Projektionen der ersten n Schwingungsvektoren zur Zeit t und c_μ die Amplitude der μ-ten Teilschwingung, so gilt offenbar:

$$\vartheta_a^{(n)}(t) = \sum_{\mu=0}^{n} c_\mu \cdot \cos\left[\varphi_1 + \frac{2\pi}{k}(\mu-1)\right]\cdot \sin\omega\left[t - \frac{2\pi}{k\,\omega_0}(\mu-1)\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2).$$

Formel (2) gilt im Zeitintervall:

$$\frac{2\pi(n-1)}{k\,\omega_0} < t < \frac{2\pi n}{k\cdot\omega_0} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3).$$

Da sich nach Voraussetzung die Stöße bei jedem Umlauf in gleicher Weise wiederholen, gilt:

$$c_{\nu+(j-1)k} = c_\nu \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

für alle ganzzahligen j. Nach m vollen Umläufen des Stoßvektors gilt: $n = k\cdot m$. Setzt man $\mu = \nu + (j-1)\cdot k$, so folgt aus (2) wegen (4):

$$\vartheta_a^{(m)}(t) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{k} c_\nu \cdot \cos\left[\varphi_1 + \frac{2\pi}{k}(\nu-1)\right]\cdot\sin\omega\left\{t - \frac{2\pi}{k\,\omega_0}\left[\nu - 1 + (j-1)\,k\right]\right\} \quad . \; . \; . \quad (2\text{a})$$

gültig für:

$$\frac{2\pi(k\cdot m-1)}{k\cdot\omega_0} < t < \frac{2\pi\cdot m}{\omega_0} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3\text{a}).$$

Aus (2a) folgt bei Verwendung der Abkürzung:

$$2\pi\frac{\omega}{\omega_0} = \psi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5),$$

$$\left.\begin{aligned}\vartheta_a^{(m)}(t) = &\sum_{\nu=1}^{k} c_\nu\cdot\cos\left[\varphi_1+\frac{2\pi}{k}(\nu-1)\right]\cdot\sin\left[\omega t - \frac{\psi}{k}(\nu-1)\right]\sum_{j=1}^{m}\cos(j-1)\cdot\psi\\ &-\sum_{\nu=1}^{k} c_\nu\cdot\cos\left[\varphi_1+\frac{2\pi}{k}(\nu-1)\right]\cdot\cos\left[\omega t-\frac{\psi}{k}(\nu-1)\right]\sum_{j=1}^{m}\sin(j-1)\,\psi\end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (2\text{b}).$$

Nun gelten die bekannten trigonometrischen Formeln:

$$\sum_{j=1}^{m}\cos(j-1)\,\psi = +\frac{1}{2} + \frac{\sin(2m-1)\frac{\psi}{2}}{2\cdot\sin\frac{\psi}{2}}, \qquad \sum_{j=1}^{m}\sin(j-1)\,\psi = \frac{\sin m\frac{\psi}{2}\cdot\sin(m-1)\frac{\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}}.$$

Dies ergibt mit (2b):

$$\left.\begin{aligned}\vartheta_a^{(m)}(t) = &\left[\frac{1}{2}+\frac{\sin(2m-1)\cdot\frac{\psi}{2}}{2\cdot\sin\frac{\psi}{2}}\right]\sum_{\nu=1}^{k} c_\nu\cdot\cos\left[\varphi_1+\frac{2\pi}{k}(\nu-1)\right]\sin\left[\omega t-\frac{\psi}{k}(\nu-1)\right]\\ &-\frac{\sin(m-1)\frac{\psi}{2}\cdot\sin\frac{m\,\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}}\sum_{\nu=1}^{k} c_\nu\cdot\cos\left[\varphi_1+\frac{2\pi}{k}(\nu-1)\right]\cos\left[\omega t-\frac{\psi}{k}(\nu-1)\right]\end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (2\text{c}).$$

Da die angedeuteten Summen nur eine endliche Gliederzahl besitzen und jedes Glied beschränkt ist, können sie nicht beliebig hohe Werte annehmen. Resonanz kann also nur auftreten, wenn die Faktoren, mit denen die Summen multipliziert sind, mit m unendlich werden. Resonanz tritt also ein, wenn:

$$\sin\frac{\psi}{2}=0;\qquad \psi=2\cdot s\cdot\pi\ldots(s=1,2,3,\ldots)\quad\ldots\ldots\quad(6)$$

gilt und wenn nicht gleichzeitig die erste Summe verschwindet. Es ist nämlich:

$$\lim_{\psi\to 2s\pi}\left[\frac{1}{2}+\frac{\sin(2m-1)\frac{\psi}{2}}{2\cdot\sin\frac{\psi}{2}}\right]=m$$

und

$$\lim_{\psi\to 2s\pi}\frac{\sin(m-1)\frac{\psi}{2}\sin m\frac{\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}}=0.$$

Ist also $\vartheta_{ar}^{(n)}(t)$ der Wert von $\vartheta_a^{(n)}(t)$ bei Resonanz, so ergibt sich aus (2c) bei Berücksichtigung von (6):

$$\vartheta_{ar}^{(n)}(t)=m\sum_{\nu=1}^{k}c_\nu\cdot\cos\left[\varphi_1+\frac{2\pi}{k}(\nu-1)\right]\sin\left[\omega t-\frac{2s\pi}{k}(\nu-1)\right]\quad\ldots\quad(2d).$$

Da m gegen ∞ wächst, nehmen auch die Ausschläge beliebig hohe Werte an. Die Bedingung hierfür ist, wie aus (5) und (6) folgt:

$$\omega=s\cdot\omega_0\quad\ldots\ldots\quad(7).$$

Nun ist (7) aber keine hinreichende Bedingung. Aus (2d) folgt nämlich nach einfacher Umformung:

$$\left.\begin{aligned}\vartheta_{ar}^{(n)}(t)=\frac{m}{2}\Big\{&\sin\omega t\sum_{\nu=1}^{k}c_\nu\left[\cos\left(\varphi_1+\frac{2\pi}{k}(s+1)(\nu-1)\right)+\cos\left(\varphi_1-\frac{2\pi}{k}(s-1)(\nu-1)\right)\right]\\&-\cos\omega t\sum_{\nu=1}^{k}c_\nu\left[\sin\left(\varphi_1+\frac{2\pi}{k}(s+1)(\nu-1)\right)-\sin\left(\varphi_1-\frac{2\pi}{k}(s-1)(\nu-1)\right)\right]\Big\}\end{aligned}\right\}\quad(2e).$$

Legt man nun die x-Achse an die Stelle $\varphi_1=0$, so gilt für die y-Achse $\varphi_1=-\frac{\pi}{2}$ (siehe Bild 1) und man erhält die zugehörigen Werte $\vartheta_{xr}^{(n)}(t)$ und $\vartheta_{yr}^{(n)}(t)$ aus (2e) zu:

$$\left.\begin{aligned}\vartheta_{xr}^{(n)}(t)=\frac{m}{2}\Big\{&\sin\omega t\sum_{\nu=1}^{k}c_\nu\left[\cos\frac{2\pi}{k}(s+1)(\nu-1)+\cos\frac{2\pi}{k}(s-1)(\nu-1)\right]\\&-\cos\omega t\sum_{\nu=1}^{k}c_\nu\left[\sin\frac{2\pi}{k}(s+1)(\nu-1)+\sin\frac{2\pi}{k}(s-1)(\nu-1)\right]\Big\}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(8)$$

und

$$\left.\begin{aligned}\vartheta_{yr}^{(n)}(t)=\frac{m}{2}\Big\{&\sin\omega t\sum_{\nu=1}^{k}c_\nu\left[\sin\frac{2\pi}{k}(s+1)(\nu-1)-\sin\frac{2\pi}{k}(s-1)(\nu-1)\right]\\&+\cos\omega t\sum_{\nu=1}^{k}c_\nu\left[\cos\frac{2\pi}{k}(s+1)(\nu-1)-\cos\frac{2\pi}{k}(s-1)(\nu-1)\right]\Big\}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(9).$$

Die Bedingung dafür, daß bei Gültigkeit von (7) keine Resonanz auftritt, ergibt demnach 4 Gleichungen, die man nach einfacher Umformung unter Benutzung der Eulerschen Formel in die beiden Gleichungen:

$$\sum_{\nu=1}^{k}c_\nu\cdot e^{i\frac{2\pi}{k}(s+1)(\nu-1)}=0;\qquad\sum_{\nu=1}^{k}c_\nu\cdot e^{i\frac{2\pi}{k}(s-1)(\nu-1)}=0\quad\ldots\ldots\quad(10)$$

zusammenfassen kann.

Nennt man s die Ordnungszahl der Resonanzschwingung, so gibt (10) jene Ordnungszahlen an, für die Resonanz nicht auftritt. Für alle andern s tritt bei Gültigkeit von (7) Resonanz ein.

In der früher zitierten Arbeit wird auf anderem Weg gezeigt, daß z. B. für zwei die Stöße übertragende Kurbeln, die unter 120° versetzt sind und die mit einer doppelt wirkenden Kraft- und Arbeitsmaschine verbunden sind, alle Ordnungszahlen, die ungerade Vielfache von 3 sind, keine Resonanz ergeben, wenn man alle Stöße von der Kraft- und Arbeitsmaschine, durch die ihre Arbeitshübe ersetzt werden, gleich groß annimmt. Allerdings sind die dort angeführten, aus der Anschauung abgeleiteten Resonanzbedingungen zu wenig umfassend. Wählt man die Einheit des Drehstoßes so, daß für die nicht verschwindenden c_ν die Bedingung $|c_\nu| = 1$ gilt, so überlegt man leicht, daß für den erwähnten Fall gilt: $k = 6$; $c_1 = c_3 = 1$, $c_2 = c_5 = 0$, $c_4 = c_6 = -1$. (Näheres siehe Abschnitt 3 der erwähnten Arbeit.) Setzt man dann $s = 3\,N$, wobei N eine ungerade Zahl ist, so sind damit die Gl. (10) erfüllt, womit die obige Behauptung bewiesen ist. Ähnlich kann man in jedem andern Fall vorgehen.

b) Kontinuierliche Folge der erregenden Impulse. Es wird angenommen, daß keine eigentlichen Stöße erfolgen, sondern es soll auf den die Schwingung ausführenden Körper ein Drehmoment veränderlicher Stärke einwirken, dessen Vektor in der eingangs erwähnten Ebene E_n mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_0 rotiert, während der Momentenverlauf sich bei jeder Umdrehung periodisch wiederholt. Das vorliegende Problem läßt sich durch einen Grenzübergang auf das vorher behandelte zurückführen.

Beginnt der Umlauf des Momentenvektors zur Zeit $\tau = 0$ und ist $M(\omega_0 \cdot \tau)$ eine periodische Funktion von τ, die proportional ist der Größe des Momentes zur Zeit τ, so erfolgt zu jedem Zeitpunkt ein unendlich kleiner Drehstoß, der proportional ist der Größe: $M(\omega_0 \cdot \tau)\,d\tau$.

Geht man also in Gl. (2) mit k und damit auch mit n zur Grenze ∞ und schreibt für $\lim\limits_{\substack{k \to \infty \\ n \to \infty}} \vartheta_a^{(n)}(t) = \vartheta_a(t)$, so ergibt sich:

$$\vartheta_a(t) = \lim_{\substack{k \to \infty \\ n \to \infty}} \sum_{\mu=0}^{n} c_\mu \cdot \cos\left[\varphi_1 + \frac{2\pi}{k}(\mu - 1)\right] \cdot \sin\left[\omega t - \frac{2\pi}{k}\frac{\omega}{\omega_0}(\mu - 1)\right].$$

Nun ist aber, wenn der erste Stoß zur Zeit $\tau = 0$ erfolgt: $\lim\limits_{\substack{k \to \infty \\ \mu \to \infty}} \frac{2\pi}{k}(\mu - 1) = \omega_0 \tau$, und nach der obigen Überlegung ist: $\lim\limits_{\substack{k \to \infty \\ \mu \to \infty}} c_\mu = M(\omega_0 \cdot \tau) \cdot d\tau$. Dies gibt, in die Gleichung für $\vartheta_a(t)$ eingesetzt wenn die Summation bis zur Zeit $\tau = t$ erfolgt:

$$\vartheta_a(t) = \int_0^t M(\omega_0 \cdot \tau) \cdot \cos(\varphi_1 + \omega_0 \tau) \cdot \sin\omega(t - \tau) \cdot d\tau \quad \ldots \ldots \quad (11).$$

Da $M(\omega_0 \cdot \tau)$ eine periodische Funktion von τ ist, die denselben Wert annimmt, wenn der Umlaufwinkel $\omega_0 \tau$ um 2π wächst, kann man eine Fouriersche Reihe ansetzen von der Form:

$$M(\omega_0 \cdot \tau) = A_0 + \sum_{j=1}^{\infty} A_j \cdot \cos(\alpha_j + j \cdot \omega_0 \cdot t) \quad \ldots \ldots \quad (12).$$

Man könnte nun (12) in (11) einsetzen und die Integration ausführen, doch läßt sich die Aufgabe rechnerisch viel einfacher bewältigen. Gl. (11) läßt sich nämlich auch so deuten, als ob ein Moment, das proportional ist der Größe $M(\omega_0 \cdot \tau) \cdot \cos(\varphi_1 + \omega_0 \cdot \tau)$, und das ständig in Richtung der a-Achse wirkt, auf ein schwingungsfähiges System wirkt, dessen Eigenschwingung die Form von Gl. (1) besitzt. Behandelt man nämlich diese Aufgabe in obiger Art durch einen analogen Grenzübergang, so kommt man, wie leicht einzusehen, ebenfalls zu Gl. (11). Da zur Eigenschwingung von der Form (1) die Differentialgleichung:

$$\ddot{\vartheta}_a + \omega^2 \cdot \vartheta_a = 0 \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

gehört, so lautet also die Differentialgleichung unseres Problems, wenn man statt τ wieder t schreibt und $M(\omega_0 \cdot t)$ so normiert, daß es das Moment, bezogen auf das Trägheitsmoment des Systems bedeutet:

$$\ddot{\vartheta}_a + \omega^2 \cdot \vartheta_a = M(\omega_0\, t) \cdot \cos(\varphi_1 + \omega_0 \cdot t) \quad \ldots \ldots \quad (14).$$

Setzt man (12) in (14) ein, so erhält man nach trigonometrischer Umformung:

$$\ddot{\vartheta}_a + \omega^2 \cdot \vartheta_a = A_0 \cdot \cos(\varphi_1 + \omega_0 t) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} A_j \{\cos[\beta_j + (j+1)\,\omega_0 t] + \cos[\gamma_j - (j-1)\,\omega_0 t]\} \quad (14a).$$

Hierin bedeuten:

$$\left.\begin{aligned} \beta_j &= \varphi_1 + a_j \\ \gamma_j &= \varphi_1 - a_j \end{aligned}\right\} \quad (15).$$

Um den Charakter der Lösung von (14a) kennenzulernen, genügt die Ermittlung eines partikulären Integrals. Ein solches ist gegeben durch:

$$\vartheta_a = \frac{A_0 \cdot \cos(\varphi_1 + \omega_0 t)}{\omega^2 - \omega_0^2} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} A_j \left\{ \frac{\cos[\beta_j + (j+1)\,\omega_0 t]}{\omega^2 - (j+1)^2\,\omega_0^2} + \frac{\cos[\gamma_j - (j-1)\,\omega_0 t]}{\omega^2 - (j-1)\,\omega_0^2} \right\} \quad (16).$$

Aus (16) ersieht man, daß die j-te Harmonische zwei mögliche Resonanzfälle liefert, die gegeben sind durch die Bedingungen:

$$\omega = (j+1)\,\omega_0 \quad (17a),$$

$$\omega = (j-1)\,\omega_0 \quad (17b).$$

Wenn (17a) oder (17b) erfüllt ist, versagt nämlich der Ansatz (16). Wenn allgemein für ganzzahlige k die Beziehung besteht:

$$\omega = k \cdot \omega_0 \quad (18),$$

so lautet die zu (18) gehörige Resonanzschwingung $\vartheta_a^{(k)}$ nach dem bekannten Lösungsansatz für den Resonanzfall:

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_a^{(k)} &= \frac{t}{4\,k\,\omega_0} [A_{k-1} \cdot \sin(\beta_{k-1} + k\,\omega_0 t) - A_{k+1} \cdot \sin(\gamma_{k+1} - k\,\omega_0 t)] + \frac{A_0 \cdot \cos(\varphi_1 + \omega_0 t)}{\omega^2 - \omega_0^2} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty}{}^{(k-1)} \frac{A_j \cdot \cos[\beta_j + (j+1)\,\omega_0 t]}{\omega^2 - (j+1)\,\omega_0^2} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty}{}^{(k+1)} \frac{A_j \cdot \cos[\gamma_j - (j-1)\,\omega_0 t]}{\omega^2 - (j-1)\,\omega_0^2} \end{aligned}\right\} \quad (19),$$

gültig für $k = 2, 3, \ldots \infty$. Hierbei bedeuten $\sum_{j=1}^{\infty}{}^{(k-1)}$ bzw. $\sum_{j=1}^{\infty}{}^{(k+1)}$ Summationen, die sich mit Ausnahme des in Klammer stehenden Index über alle ganzzahligen Indizes von 1 bis ∞ erstrecken. Eine besondere Formel ist nur für $\vartheta_a^{(1)}$ zu entwickeln; sie lautet, wie man leicht findet:

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_a^{(1)} &= \frac{t}{4\,\omega_0} \{2\,A_0 \cdot \sin(\varphi_1 + \omega_0 t) - A_2 \cdot \sin(\gamma_2 - \omega_0 t)\} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} A_j \frac{\cos[\beta_j + (j+1)\,\omega_0 t]}{\omega^2 - (j+1)^2\,\omega_0^2} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty}{}^{(2)} A_j \frac{\cos[\gamma_j - (j-1)\,\omega_0 t]}{\omega^2 - (j-1)^2\,\omega_0^2} \end{aligned}\right\} \quad (19a).$$

Aus (19) und (19a) erkennt man unschwer, daß bei Gültigkeit von (18) Resonanz für alle Lagen der Achse a nur dann unterbleibt, wenn A_{k-1} und A_{k+1} gleichzeitig verschwinden.

3. Ermittlung der gedämpften Resonanzschwingung.

a) Diskrete Einzelstöße. Es gelten dieselben Voraussetzungen wie im Abschnitt 2a, nur seien die erzeugten Schwingungen gedämpft und es möge ein Drehstoß, der zur Zeit $t = 0$ stattfindet, eine Schwingung von der Form:

$$\vartheta = c \cdot \sin \omega\, t \cdot e^{-\varepsilon t} \quad (20)$$

hervorrufen, wobei ε die Dämpfungskonstante bedeutet. ω ist die Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung, die bekanntlich von der der ungedämpften abweicht, wenn man, wie es Formel (20) entspricht, lineare Abhängigkeit der Dämpfungskraft von der Geschwindigkeit voraussetzt.

Es sei zunächst zur Vorbereitung der Fall behandelt, daß alle Stöße dieselbe Größe und Richtung besitzen. Ist dann T der gleichbleibende zeitliche Abstand zweier aufeinanderfolgender Stöße, so ist der Ausschlagwinkel $\vartheta_0^{(m)}(t)$ nach m Stößen, wenn der erste zur Zeit $t = 0$ stattfindet:

$$\vartheta_0^{(m)}(t) = c \sum_{j=1}^{m} \sin \omega\,[t - (j-1)\,T]\, e^{-\varepsilon[t-(j-1)T]} \quad (21),$$

gültig im Intervall:

$$(m-1) \cdot T < t < m\,T \quad (22).$$

Bezeichnet man mit J den imaginären Anteil einer komplexen Zahl, so kann man (21) auch schreiben:

$$\vartheta_0^{(m)}(t) = c \cdot J\left\{e^{-t(\varepsilon - i\omega)} \cdot \sum_{j=1}^{m} e^{(j-1)T(\varepsilon - i\omega)}\right\}.$$

Man erhält hieraus nach der Summenformel für die geometrische Reihe, nachdem man den Nenner reell gemacht hat:

$$\vartheta_0^{(m)}(t) = c \cdot J\left\{\frac{e^{\varepsilon[(m+1)T-t]+i\omega[-(m-1)T+t]} - e^{\varepsilon(mT-t)+i(-mT+t)} - e^{-\varepsilon t}\left[e^{\varepsilon T+i\omega(T+t)} + e^{i\omega t}\right]}{e^{2\varepsilon T} - 2e^{\varepsilon T} \cdot \cos\omega T + 1}\right\}.$$

Das dritte Glied des Zählers: $e^{-\varepsilon t}[e^{\varepsilon T + i\omega(T+t)} + e^{i\omega t}]$ wird offenbar mit wachsender Zeit beliebig klein. Begnügt man sich mit der asymptotischen Lösung $\tilde{\vartheta}_0^{(m)}(t)$, die sich nach dem Abklingen der Anfangsstörung einstellt, so erhält man:

$$\tilde{\vartheta}_0^{(m)}(t) = c\,\frac{e^{\varepsilon[(m+1)T-t]} \cdot \sin\omega[-(m-1)T+t] - e^{\varepsilon[mT-t]} \cdot \sin\omega[-mT+t]}{e^{2\varepsilon T} - 2e^{\varepsilon T} \cdot \cos\omega T + 1} \qquad (21\,\mathrm{a}),$$

gültig im Intervall (22).

Führt man die Zeit t_1 ein durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg}\omega \cdot t_1 = \frac{\sin\omega T}{e^{\varepsilon T} - \cos\omega T} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23),$$

so erhält man aus (21a) durch elementare Umformung:

$$\tilde{\vartheta}_0^{(m)}(t) = \frac{c \cdot e^{-\varepsilon[t-(m-1)T]} \cdot \sin\omega[t-(m-1)T+t_1]}{\sqrt{1 - 2e^{-\varepsilon T} \cdot \cos\omega T + e^{-2\varepsilon T}}} \quad \ldots\ldots \quad (21\,\mathrm{b}).$$

Wenn nun, wie im Abschnitt 2a, je Umdrehung k Stöße erfolgen, deren Vektoren den Vollkreis in k gleiche Teile unterteilen, und wenn zur Zeit $t=0$ der erste Umlauf des Stoßvektors beginnt, so hat man k Vektoren von der Form (21b) zu überlagern, indem man die Summe ihrer Projektionen auf die Richtung $\boldsymbol{a}$ bildet. Ist φ_1 der Winkel, den der zur Zeit $t=(m-1)T$ erfolgende erste Stoß des m-ten Umlaufes mit der a-Achse einschließt, so schließt der um die Zeit $\frac{(\nu-1)T}{k}$ später erfolgende ν-te Stoß des m-ten Umlaufes den Winkel $\varphi_1 + \frac{\omega_0 \cdot T(\nu-1)}{k}$ mit der a-Achse ein. Ist $\tilde{\vartheta}_\nu^{(m)}\left[t - \frac{(\nu-1)T}{k}\right]$ die asymptotische Lösung für die Schwingung in der Richtung des ν-ten Stoßes gemäß Gl. (21b), so erhält man die Summe der Projektionen der $\tilde{\vartheta}_\nu^{(m)}\left[t - \frac{(\nu-1)T}{k}\right]$ auf die a-Achse, $\tilde{\vartheta}_a^{(m)}(t)$, zu:

$$\tilde{\vartheta}_a^{(m)}(t) = \sum_{\nu=1}^{k} \tilde{\vartheta}_\nu^{(m)}\left[t - \frac{T}{k}(\nu-1)\right] \cdot \cos\left[\varphi_1 + \frac{\omega_0 T}{k}(\nu-1)\right] \quad \ldots\ldots \quad (24).$$

Durch Einsetzen des Wertes von $\tilde{\vartheta}_\nu^{(m)}\left[t - \frac{T}{k}(\nu-1)\right]$ entsprechend Gl. (21b) erhält man:

$$\tilde{\vartheta}_a^{(m)}(t) = \sum_{\nu=1}^{k} \frac{c_\nu \cdot e^{-\varepsilon\left[t-(m-1)T-\frac{\nu-1}{k}T\right]} \cdot \sin\omega\left[t-(m-1)T-\frac{\nu-1}{k}T+t_1\right] \cdot \cos\left[\varphi_1 + \frac{2\pi(\nu-1)}{k}\right]}{\sqrt{1 - 2e^{-\varepsilon T} \cdot \cos\omega T + e^{-2\varepsilon T}}} \quad (24\,\mathrm{a})$$

gültig im Intervall:

$$\left(m - \frac{1}{k}\right) \cdot T < t < m \cdot T \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25).$$

Es soll nun für den praktisch wichtigen Fall der kleinen Dämpfung aus (24a) die Resonanzbedingung abgeleitet werden. Der Nenner von (24a) nimmt dann bei immer kleiner werdendem ε beliebig kleine und somit $\tilde{\vartheta}_a^{(m)}(t)$ beliebig große Werte an, wenn die Bedingung erfüllt ist, daß:

$$\cos\omega T = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26).$$

Da außerdem die Beziehung gilt:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27),$$

so liefert dies die Resonanzbedingung für kleine ε:

$$\omega = s \cdot \omega_0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (28)$$

für ganzzahliges s, was mit Gl. (7) übereinstimmt. Bezeichnet $\tilde{\vartheta}_{ar}^{(m)}(t)$ den Wert von $\tilde{\vartheta}_a(t)$ bei Resonanz, so erhält man aus (24a), (27), (28) und (23):

$$\tilde{\vartheta}_{ar}^{(m)}(t) = \sum_{\nu=1}^{k} \left\{ \frac{c_\nu}{1 - e^{-\varepsilon T}} \cdot e^{-\varepsilon \left[t - (m-1)T - \frac{\nu - 1}{k} T \right]} \cdot \sin \frac{2\pi s}{T} \left[t - \frac{\nu - 1}{k} T \right] \cdot \cos \left[\varphi_1 + \frac{2\pi(\nu - 1)}{k} \right] \right\} \quad (24\,\mathrm{b})$$

gültig im Intervall (25).

Doch gibt es auch hier gewisse Ordnungszahlen s, für die keine Resonanz eintritt. Wählt man die x-Achse und y-Achse wieder entsprechend Bild 1, so sind diese gekennzeichnet durch die Werte $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$. Man erhält dann aus (24b) nach einfacher Umformung bei Verwendung von (27):

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\vartheta}_{xr}^{(m)}(t) = \frac{e^{-\varepsilon[t-(m-1)T]}}{1 - e^{-\varepsilon T}} \Bigg\{ & \sin s\,\omega_0 t \sum_{\nu=1}^{k} c_\nu \cdot e^{\frac{2\pi\varepsilon}{k\omega_0}(\nu-1)} \cdot \cos \frac{2\pi s}{k}(\nu-1) \cdot \cos \frac{2\pi}{k}(\nu-1) \\ & - \cos s\,\omega_0 t \sum_{\nu=1}^{k} c_\nu \cdot e^{\frac{2\pi\varepsilon}{k\omega_0}(\nu-1)} \cdot \sin \frac{2\pi s}{k}(\nu-1) \cdot \cos \frac{2\pi}{k}(\nu-1) \Bigg\} \end{aligned}\right\} \quad (29),$$

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\vartheta}_{yr}^{(m)}(t) = \frac{e^{-\varepsilon[t-(m-1)T]}}{1 - e^{-\varepsilon T}} \Bigg\{ & \sin s\,\omega_0 t \sum_{\nu=1}^{k} c_\nu\, e^{\frac{2\pi\varepsilon}{k\omega_0}(\nu-1)} \cdot \cos \frac{2\pi s}{k}(\nu-1) \cdot \sin \frac{2\pi}{k}(\nu-1) \\ & - \cos s\,\omega_0 t \cdot \sum_{\nu=1}^{k} \left[c_\nu \cdot e^{\frac{2\pi\varepsilon}{k\omega_0}(\nu-1)} \cdot \sin \frac{2\pi s}{k}(\nu-1) \cdot \sin \frac{2\pi}{k}(\nu-1) \right] \Bigg\} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (33).$$

Wenn alle 4 angedeuteten Summen gleichzeitig verschwinden, kann keine Resonanz auftreten. Die Bedingungen hierfür ergeben wieder 4 Gleichungen, die sich in die beiden Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{k} c_\nu \cdot e^{\frac{2\pi}{k}\left[\frac{\varepsilon}{\omega_0} + i(s+1)\right](\nu-1)} = 0, \qquad \sum_{\nu=1}^{k} c_\nu \cdot e^{\frac{2\pi}{k}\left[\frac{\varepsilon}{\omega_0} + i(s-1)\right](\nu-1)} = 0 \quad \ldots \quad (34)$$

zusammenfassen. Für verschwindende Dämpfung gehen die Gl. (34) in die Gl. (10) über.

b) Kontinuierliche Impulse. Es sollen dieselben Voraussetzungen gelten wie im Abschnitt 2b, nur seien die Schwingungen gedämpft. Man kann durch dieselbe Argumentation wie im Abschnitt 2b zeigen, daß die Projektion der Schwingung auf eine beliebige a-Achse so ermittelt werden kann, als ob ein Moment von der Größe: $M(\omega_0 t) \cdot \cos(\varphi_1 + \omega_0 \cdot t)$, das ständig in die Richtung der a-Achse fällt, die Schwingung anregen würde. Zur gedämpften Eigenschwingung von der Form (20) gehört die Differentialgleichung:

$$\ddot{\vartheta}_a + 2\varepsilon\,\dot{\vartheta}_a + (\varepsilon^2 + \omega^2)\,\vartheta_a = 0\,.$$

Die Differentialgleichung des vorliegenden Problems lautet also, wenn man $M(\omega_0 \cdot t)$ wieder so normiert wie im Abschnitt 2b:

$$\ddot{\vartheta}_a + 2\varepsilon\,\dot{\vartheta}_a + (\varepsilon^2 + \omega^2)\,\vartheta_a = M(\omega_0 \cdot t) \cdot \cos(\varphi_1 + \omega_0 \cdot t) \quad \ldots \ldots \quad (35),$$

was mit dem Ansatz (12) nach trigonometrischer Umformung liefert:

$$\left.\begin{aligned} & \ddot{\vartheta}_a + 2\varepsilon\,\dot{\vartheta}_a + (\varepsilon^2 + \omega^2)\,\vartheta_a = A_0 \cdot \cos(\varphi_1 + \omega_0 t) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} A_j \{\cos[\beta_j + (j+1)\,\omega_0 t] + \cos[\gamma_j - (j-1)\,\omega_0 t]\} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (35\mathrm{a}),$$

wobei β_j und γ_j durch (15) erklärt sind. Die asymptotische Lösung $\tilde{\vartheta}_a$ von (35a) ist nach bekannten Methoden leicht zu ermitteln. Sie lautet:

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\vartheta}_a = &\frac{A_0 \cdot \cos[\varphi_1 + \omega_0 (t + t_1)]}{\sqrt{(\varepsilon^2 + \omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\,\varepsilon^2\,\omega_0^2}} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} A_j \left\{\frac{\cos[\beta_j + (j+1)\,\omega_0\,(t + t_{j+1})]}{\sqrt{[\varepsilon^2 + \omega^2 - (j+1)^2\,\omega_0^2]^2 + 4\,\varepsilon^2\,(j+1)^2\,\omega_0^2}}\right. \\ &\left. + \frac{\cos[\gamma_j - (j-1)\,\omega_0\,(t + t_{j-1})]}{\sqrt{[\varepsilon^2 + \omega^2 - (j-1)^2\,\omega_0^2]^2 + 4\,\varepsilon^2\,(j-1)^2\,\omega_0^2}}\right\}\end{aligned}\right\} \quad (36).$$

Hierbei ist t_k allgemein erklärt durch:

$$\operatorname{tg} k\,\omega_0\,t_k = -\frac{2\,\varepsilon\,k \cdot \omega_0}{\varepsilon^2 + \omega^2 - k^2\,\omega_0^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (37)$$

für ganzzahlige k, und zwar gilt, um den Quadranten des Winkels $k\,\omega_0\,t_k$ eindeutig festzulegen:

$$\cos k\,\omega_0\,t_k = \frac{\varepsilon^2 + \omega^2 - k^2\,\omega_0^2}{\sqrt{\{[\varepsilon^2 + \omega^2 - k^2\,\omega_0^2]^2 + 4\,\varepsilon^2\,k^2\,\omega_0^2\}^3}} \quad \ldots \ldots \ldots (37\,\mathrm{a}),$$

$$\sin k\,\omega_0\,t_k = -\frac{2\,\varepsilon\,k\,\omega_0}{\sqrt{\{[\varepsilon^2 + \omega^2 - k^2\,\omega_0^2]^2 + 4\,\varepsilon^2\,k^2\,\omega_0^2\}^3}} \quad \ldots \ldots \ldots (37\,\mathrm{b}).$$

Wie man aus (36) sieht, liefert die j-te Harmonische zwei mögliche Resonanzfälle, für die die Bedingungen gelten:

$$\omega = \sqrt{(j+1)^2\,\omega_0^2 - \varepsilon^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (38)$$

oder:

$$\omega = \sqrt{(j-1)^2\,\omega_0^2 - \varepsilon^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (39).$$

Wenn allgemein für ganzzahliges k die Beziehung besteht:

$$\omega = \sqrt{k^2\,\omega_0^2 - \varepsilon^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (40),$$

so ist die zugehörige Resonanzschwingung $\tilde{\vartheta}_a^{(k)}$, wie sich aus (35), (37a), (37b) und (40) ergibt, gegeben durch:

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\vartheta}_a^{(k)} = &\frac{A_0 \cdot \cos[\varphi_1 + \omega_0 (t + t_1)]}{\sqrt{(\varepsilon^2 + \omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\,\varepsilon^2\,\omega_0^2}} + \frac{A_{k-1} \cdot \sin(\beta_{k-1} + k\,\omega_0\,t) - A_{k+1} \cdot \sin(\gamma_{k+1} - k\,\omega_0\,t)}{4\,\varepsilon\,k\,\omega_0} \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}{}^{(k-1)} \frac{A_j \cdot \cos[\beta_j + (j+1)\,\omega_0\,(t + t_{j+1})]}{\sqrt{[\varepsilon^2 + \omega^2 - (j+1)^2\,\omega_0^2]^2 + 4\,\varepsilon^2\,(j+1)^2\,\omega_0^2}} \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}{}^{(k+1)} \frac{A_j \cdot \cos[\gamma_j - (j-1)\,\omega_0\,(t + t_{j-1})]}{\sqrt{[\varepsilon^2 + \omega^2 - (j-1)^2\,\omega_0^2]^2 + 4\,\varepsilon^2\,(j-1)^2\,\omega_0^2}}\end{aligned}\right\} \quad (41),$$

wobei die Symbole $\sum_{j=1}^{\infty}{}^{(k-1)}$ und $\sum_{j=1}^{\infty}{}^{(k+1)}$ dieselbe Bedeutung haben wie im Abschnitt 2b. Eine besondere Formel ist noch für $\vartheta_a^{(1)}$ erforderlich; sie lautet:

$$\left.\begin{aligned}\vartheta_a^{(1)} = &\frac{2\,A_0 \cdot \sin(\varphi_1 + \omega_0\,t) - A_2 \cdot \sin(\gamma_2 - \omega_0\,t)}{4\,\varepsilon\,\omega_0} \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_j \cdot \cos[\beta_j + (j+1)\,\omega_0\,(t + t_{j+1})]}{\sqrt{[\varepsilon^2 + \omega^2 - (j+1)^2\,\omega_0^2]^2 + 4\,\varepsilon^2\,(j+1)^2\,\omega_0^2}} \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}{}^{(2)} \frac{A_j \cdot \cos[\gamma_j - (j-1)\,\omega_0\,(t + t_{j-1})]}{\sqrt{[\varepsilon^2 + \omega^2 - (j-1)^2\,\omega_0^2]^2 + 4\,\varepsilon^2\,(j-1)^2\,\omega_0^2}}\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (41\,\mathrm{a}).$$

Aus (41) und (41a) ist zu entnehmen, daß bei Gültigkeit von (40) eine Resonanzschwingung nur dann für alle Lagen der a-Achse unterbleibt, wenn A_{k-1} und A_{k+1} gleichzeitig verschwinden.

Zusammenfassender Bericht.

Genäherte Berechnung von Eigenwerten.

Von *L. Collatz* in Karlsruhe.

Feststehend gebrauchte Bezeichnungen.

L, M lineare (gewöhnliche oder partielle) Differentialoperatoren.

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_\nu, \ldots$ die der Größe nach geordneten Eigenwerte des betreffenden Problems (mehrfache entsprechend mehrfach gezählt). Nur in einigen Zahlenbeispielen der Tafel V sind die Eigenwerte (Quadrate der Eigenfrequenzen) mit $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots$ bezeichnet.

$f_1, f_2, f_3, \ldots, f_\nu, \ldots$ die zugehörigen Eigenfunktionen.

$l_1, l_2, l_3, \ldots, l_\nu, \ldots$ untere Schranken für die Eigenwerte, $l_\nu \leq \lambda_\nu$.

$L_1, L_2, L_3, \ldots, L_\nu, \ldots$ obere Schranken für die Eigenwerte, $L_\nu \geq \lambda_\nu$.

$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_\nu, \ldots$ Näherungen für die Eigenwerte, von denen nicht von vornherein bekannt ist, ob sie untere oder obere Schranken sind.

w eine den Randbedingungen des Problems und gewissen jeweils genauer festzulegenden Differentiierbarkeitseigenschaften genügende, aber sonst willkürliche Funktion.

x, y unabhängige Veränderliche.

s, t charakterisieren die Gesamtheit der unabhängigen Veränderlichen.

$\int \ldots ds$, $\int \ldots dt$ ohne Angabe der Integrationsgrenzen bedeutet stets Integration über das Grundgebiet.

1. Ziel des Aufsatzes. In der folgenden Arbeit soll im Anschluß an die klassischen Methoden zur genäherten Berechnung von Eigenwerten eine Reihe neuerer Methoden kurz zusammengestellt werden, wobei besonders auf die Bestrebungen, für die Eigenwerte untere Schranken aufzustellen, eingegangen werden soll.

Obwohl man den Stand der Entwicklung noch keineswegs als abgeschlossen bezeichnen kann, ist es notwendig, von Zeit zu Zeit sich Rechenschaft über das Erreichte zu geben und sich Klarheit zu verschaffen, welche Punkte am notwendigsten der Weiterarbeit bedürfen.

Es werden Eigenwertprobleme bei Differentialgleichungen der Gestalt

$$L[\varphi] + \lambda M[\varphi] = 0 \quad \ldots \ldots \quad (1.1)$$

oder in der spezielleren Form

$$L[\varphi] + \lambda p \cdot \varphi = 0 \quad \ldots \ldots \quad (1.2)$$

betrachtet. Dazu kommen jeweils noch die zugehörigen Randbedingungen. $L[\varphi]$ und $M[\varphi]$ sind dabei in φ lineare (gewöhnliche oder partielle) Differentialausdrücke. (1.1) stellt die allgemeinste auch in λ lineare Differentialgleichung dar. Viele der im folgenden beschriebenen Methoden sind nur auf die speziellere Gl. (1.2) anwendbar; aber es sind in letzter Zeit doch schon bei so vielen technischen Problemen Differentialgleichungen der Form (1.1) aufgetreten, daß man sich nicht mehr auf die Gestalt (1.2) beschränken darf. Daher sind die Methoden, soweit sie sich auch auf (1.1) anwenden lassen, entsprechend allgemein dargestellt worden (die rein mathematische Durchforschung der Gl. (1.1) ist noch nicht abgeschlossen). Dabei ist (1.1) nicht das allgemeinste Eigenwertproblem überhaupt, da der Parameter λ dort linear auftritt. Es gibt technische Probleme, bei denen der Eigenwert λ nichtlinear vorkommt (z. B. bei Federhofer [F. 1])[1]).

Der Aufsatz soll eine zusammenfassende Übersicht der verschiedenen Methoden geben. Dazu gehört an einzelnen Stellen auch eine kurze Darstellung der Beweise, soweit es zum vollen Verständnis der Methoden und im Interesse des Zusammenhanges zwischen den einzelnen Methoden wünschenswert erscheint. Jedoch mußte auf eine vollständige, bis zu den technischen Einzelheiten reichende Durchführung der verschiedenen Verfahren verzichtet werden.

[1]) Große Buchstaben mit Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Schrifttumsverzeichnis am Schlusse des zweiten Teiles dieser Arbeit.

2. Kurze Aufzählung der verschiedenen Methoden. Der erste Abschnitt über die schrittweisen Näherungen ist für den ersten und die höheren Eigenwerte bei der allgemeinen Gl. (1.1) anwendbar. Es wird darauf hingewiesen, daß man unter Umständen vorsichtig vorgehen muß. Für den wichtigen Spezialfall des ersten Eigenwertes der Gl. (1.2) (mit gewissen Voraussetzungen über die Selbstadjungiertheit usw.) werden die brauchbaren, oft sehr engen Schranken von Temple besprochen.

Der zweite Abschnitt über das Ritzsche Verfahren ist ebenfalls auf viele Gleichungen der allgemeinen Gestalt (1.1) anwendbar. Das Ritzsche Verfahren darf nicht immer in der Galerkinschen Form angewendet werden. Mit den Gleichungen von Ritz werden die von Grammel verglichen, die sich auf die Gl. (1.2) beziehen. In vielen Fällen, besonders bei analytisch bequem zugänglichen Problemen kann man nach der Methode von Trefftz-Willers untere Schranken für die Eigenwerte aufstellen.

Die Einschließungssätze für die Eigenwerte der speziellen Gl. (1.2) im dritten Abschnitt liefern bei oft nicht großer Rechenarbeit Schranken für die Eigenwerte, die entsprechend grob sind. Um enge Schranken zu erhalten, muß man die Eigenfunktionen recht genau schätzen können. Für den ersten Eigenwert wird die Trefftz-Newingsche Verfeinerung der Weinsteinschen Methode angegeben, die oft enge Schranken liefert.

Ebenso liefert das Differenzenverfahren im vierten Abschnitt bei geringer Rechenarbeit einen Überblick über die Eigenwerte. Bei relativ großer Maschenweite (wenig Teilpunkte und daher wenig Rechenarbeit) werden auch die höheren Eigenwerte größenordnungsmäßig erfaßt. Für genauere Berechnungen kann man bei entsprechendem Mehraufwand an Rechenarbeit das Verfahren zweiter Annäherung verwenden.

Die Methoden der Störungsrechnung im fünften Abschnitt leisten gute Dienste, wenn man zu dem vorgelegten Eigenwertproblem ein Problem mit denselben Randbedingungen angeben kann, dessen exakte Lösung bekannt ist und bei dem die Koeffizienten der Differentialgleichung sich wertemäßig nicht viel von denen der Ausgangsdifferentialgleichung unterscheiden.

Im sechsten Abschnitt werden kurz einige ganz grobe Methoden genannt, die leicht zu handhaben sind und für die Eigenwerte oft schlechte Näherungen liefern, die aber doch für manche der in den anderen Abschnitten genannten Abschätzungen wichtig sind, bei denen man z. B. für die höheren Eigenwerte wenigstens ganz grobe ungefähre Werte benötigt. Der Vollständigkeit halber wurden auch die Integralgleichungsmethoden kurz erwähnt. So wertvoll der Zusammenhang mit den Integralgleichungen für die Theorie ist, so tritt die Greensche Funktion für numerische Zwecke hinter den anderen Methoden an Bedeutung zurück. Bei komplizierteren Problemen, besonders bei partiellen Differentialgleichungen sind die Methoden, die die Greensche Funktion verwenden, praktisch unbrauchbar.

Der siebente Abschnitt erläutert die in den vorangegangenen Abschnitten besprochenen Methoden zunächst ausführlich an einem und demselben Zahlenbeispiel und gibt dann in einer Tabelle die Ergebnisse der verschiedenen Methoden an eine Reihe weiterer numerischer Beispiele.

Manche der in diesem Bericht beschriebenen Methoden sind auch auf andere Probleme (Randwertprobleme) anwendbar. Jedoch sind die Verfahren hier nur so weit beschrieben, als sie zur genäherten Berechnung von Eigenwerten in Betracht kommen. Das gilt insbesondere für das Ritzsche Verfahren. Die hier beschriebene Form des Ritzschen Verfahrens ist ganz auf Eigenwerte zugeschnitten. Auch die Bemerkungen über die Integralgleichungen beziehen sich nur auf die Berechnung von Eigenwerten von Differentialgleichungsproblemen.

1. Abschnitt:

Das Verfahren der schrittweisen Näherungen.

3. Das Verfahren im allgemeinen Fall. Zur Bestimmung des kleinsten Eigenwertes λ_1 von (1.1) geht man von einer willkürlich gewählten Funktion $F_0(s)$ aus (s verkörpert die Gesamtheit der unabhängigen Veränderlichen) und berechnet eine Anzahl Glieder F_ν der Funktionenfolge, die durch

$$L[F_n] + M[F_{n-1}] = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (3.1)$$

und die Forderung, daß $F_1, F_2, \ldots$ den Randbedingungen genügen sollen, festgelegt werden. Als Näherungswerte $\Lambda_1^{(n)}$ für λ_1 werden die Werte (für $n = 1, 2, \ldots$)

$$\Lambda_1^{(n)} = \frac{\int F_n M[F_{n-1}]\,ds}{\int F_n M[F_n]\,ds} = \frac{-\int F_n L[F_n]\,ds}{\int F_n M[F_n]\,ds} \qquad (3.2)$$

angesehen [2]. Morrow [M. 4] hat an einer großen Anzahl von Beispielen bei gewöhnlichen

[2]) Für das Verfahren der schrittweisen Näherungen (3.1) sind auch andere Namen gebräuchlich, z. B. sukzessive Approximationen und für spezielle Fälle Engesser-Vianello-Verfahren. (3.2) ist die sinngemäße Verallgemeinerung der üblichen Mittelwertmethoden, vgl. Grammel [G. 1].

Differentialgleichungen gezeigt, daß man in dem Ausdruck (ohne Ausführung von Integrationen, also mit geringerer Rechenarbeit)

$$\Lambda_1^{*(n)} = \left(\frac{M[F_{n-1}]}{M[F_n]}\right)_\xi = \left(\frac{-L[F_n]}{M[F_n]}\right)_\xi \quad (3.3)$$

brauchbare Näherungen erhält, wenn man die Differentialausdrücke an der Stelle ξ nimmt, an der F_n seinen größten Wert annimmt (Stelle größten Ausschlags). Die Formeln (3.2) und (3.3) können auch zur Aufstellung von Näherungswerten für die höheren Eigenwerte benutzt werden, indem man für F_n eine Funktion einsetzt, die ungefähr den erwarteten Verlauf der entsprechenden höheren Eigenfunktion wiedergibt. Jedoch hat Blumenthal [B. 4] an Beispielen gezeigt, daß man mitunter beim Schätzen der Eigenfunktionen vorsichtig sein muß und daß das Verfahren der schrittweisen Näherungen gegen falsche Werte konvergieren kann.

Ferner hat Bickel ([B. 2] S. 271 bis 272) Beispiele angegeben, in denen die erste Oberschwingung dieselben Knotenstellen hat wie die Grundschwingung, in denen also die Knotenmethode (vgl. etwa Hohenemser-Prager [H. 5] S. 216 bis 227) nicht unmittelbar anwendbar ist.

Aussagen über die Konvergenz des hier genannten Verfahrens und über Fehlerschranken können jedoch erst gemacht werden, wenn man über L und M engere Voraussetzungen trifft.

4. Zugrundelegung einer spezielleren Problemklasse. Das Rayleighsche Prinzip. Es sei jetzt $M[F] = p \cdot F$, wo p eine stetige, positive Funktion ist, und in

$$L[\varphi] + \lambda p \varphi = 0$$

werden bei den folgenden Betrachtungen von dem Differentialausdruck L und den Randbedingungen die Eigenschaften benutzt: Es ist

$$\int w\, L[w]\, ds < 0 \quad (4.1)$$

für jede den Randbedingungen genügende, nicht identisch verschwindende Funktion w[2*]). Es existiert eine symmetrische Greensche Funktion $G(s, t)$ (es ist für die numerische Rechnung nicht nötig, daß die Greensche Funktion wirklich aufgestellt wird), so daß die Aussage: φ erfüllt die Randbedingungen und $L[\varphi] = u$ gleichwertig ist mit

$$\varphi(s) = -\int G(s, t)\, u(t)\, dt \quad (4.2).$$

Das Eigenwertproblem besitzt eine abzählbare Folge diskreter positiver Eigenwerte $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots$ Die Bedingung $\int w\, L[w]\, ds < 0$, deren Erfülltsein man in vielen Fällen direkt durch Teilintegration bestätigen kann, ist gleichbedeutend damit, daß die Greensche Funktion $G(s, t)$ positiv definit ist (Courant-Hilbert [C. 4] S. 104/105); setzt man nämlich $L[w] = z$, so ist

$$-\int w(s)\, L[w(s)]\, ds = \iint G(s, t)\, z(t)\, z(s)\, dt\, ds.$$

Die hier gestellten Bedingungen sind z. B. stets erfüllt bei den selbstadjungierten gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$(k_1(x) f'(x))' + k_0(x) f(x) + \lambda p(x) f(x) = 0 \quad (4.3),$$

$$-(k_2(x) f''(x))'' + (k_1(x) f'(x))' - k_0(x) f(x) + \lambda p(x) f(x) = 0 \quad (4.4),$$

wenn p, k_0, k_1, k_2 positive Funktionen und die Randbedingungen an den Randstellen 0 und a so beschaffen sind, daß für zwei beliebige, den Randbedingungen genügende Funktionen w und z im Falle der Gl. (4.3) gilt (selbstadjungierte Randwertaufgabe)

$$[k_1(w z' - z w')]_0^a = 0 \quad (4.5)$$

bzw. im Falle der Gl. (4.4)

$$[-w(k_2 z'')' + z(k_2 w'')' - k_2(w'' z' - w' z'') + k_1(w z' - z w')]_0^a = 0 \quad (4.6).$$

Eine Aufzählung einer Anzahl von Randbedingungen, in denen (4.5), (4.6) erfüllt sind, findet sich bei Frank-v. Mises [F. 2], S. 567 u. 577. Auf eine Aufzählung weiterer Eigenwertprobleme (z. B. auch bei partiellen Differentialgleichungen, Frank-v. Mises [F. 2], S. 578ff.), bei denen die oben genannten Bedingungen erfüllt sind, muß hier verzichtet werden.

[2*]) Diese Bedingung ist in manchen Fällen etwas zu scharf, z. B. bei dem Eigenwertproblem $y'' + \lambda y = 0$, $y(a) = y(b)$, $y'(a) = y'(b)$ ist diese Voraussetzung nicht erfüllt. Den Randbedingungen genügt $w = 1$ und es ist $\int_a^b w\, L[w]\, dx = 0$.

Unter diesen Voraussetzungen über das zugrunde gelegte Eigenwertproblem gilt der bekannte Reziprozitätssatz: Erfüllen φ und φ^* die Randbedingungen und ist $L[\varphi]=u$, $L[\varphi^*]=u^*$, so folgt

$$\int u(s)\,\varphi^*(s)\,ds = -\int\left[\int G(s,t)\,u^*(t)\,dt\right]u(s)\,ds$$

$$= -\int\left[\int G(t,s)\,u(s)\,ds\right]u^*(t)\,dt = \int u^*\varphi\,dt$$

oder

$$\int \varphi^*\,L[\varphi]\,ds = \int \varphi\,L[\varphi^*]\,ds \qquad (4.7).$$

Geht man wie in **3** von einer willkürlichen nicht identisch verschwindenden Funktion F_0 aus, so berechnet man den Randbedingungen genügende Funktionen $F_1, F_2, \ldots$ nach

$$L[F_n] + p\,F_{n-1} = 0 \qquad (n=1,2,\ldots) \qquad (4.8).$$

Dann sind sämtliche Zahlen

$$\mu_{2n} = \frac{\int p\,F_n\,F_{n-1}\,ds}{\int p\,F_n^2\,ds} \qquad (n=1,2,\ldots) \qquad (4.9)$$

obere Schranken für den kleinsten Eigenwert λ_1 (Rayleighsches Prinzip). Da F_0 eine willkürliche Funktion war, genügt es, den Beweis für μ_2 zu erbringen. Da diese Zahl μ_2 auch in den folgenden Abschnitten (in ganz anderem Zusammenhang) wiederholt auftritt, sei für sie der Buchstabe R (Rayleigh) eingeführt.

$$\mu_2 = R[F_1] = \frac{-\int F_1\,L[F_1]\,ds}{\int p\,F_1^2\,ds} \qquad (4.10).$$

Ebenso sind dann die mit den weiteren Funktionen $F_2, F_3, \ldots$ an Stelle mit F_1 gebildeten Rayleighschen Quotienten $R[F_2]$, $R[F_3], \ldots$ obere Schranken für λ_1, aber — das sei ausdrücklich betont — es braucht nicht $R[F_0] \geqq \lambda_1$ zu sein (wie z. B. schon das triviale Beispiel $L[f]+\lambda p f = f''+\lambda f$; $f(0)=f(1)=0$; $F_0 \equiv 1$ zeigt); das hängt damit zusammen, daß die F_1, $F_2, \ldots$ die Randbedingungen erfüllen, dagegen F_0 sie nicht zu erfüllen braucht.

5. Beweis des Rayleighschen Prinzips. Da dieser Beweis die Grundlage für die folgenden oberen und unteren Schranken bildet, muß noch kurz auf ihn eingegangen werden. Er ergibt sich leicht bei Betrachtung der Hilfsfunktion

$$\psi = L[F_1] + R\,p\,F_1 = -p\,F_0 + R\,p\,F_1 \qquad (5.1).$$

Nach der Definition (4.10) von R ist ψ zu F_1 orthogonal:

$$\int \psi\,F_1\,ds = 0 \qquad (5.2).$$

Ist $\psi \equiv 0$, so ist F_1 Lösung von (1.2) und R ein Eigenwert, also die Behauptung $R \geqq \lambda_1$ richtig. Ist ψ nicht $\equiv 0$, so sei $u(s,\lambda)$ die den Randbedingungen genügende Lösung der Differentialgleichung

$$L[u] = \psi - \lambda\,p\,u \qquad (5.3),$$

die aus (5.1) hervorgeht, indem man R durch den Parameter λ ersetzt. Für $\lambda = R$ ist also $u(s,\lambda) = u(s,R) = F_1$. Die Funktion $u(s,\lambda)$ existiert bekanntlich für Werte λ, die nicht Eigenwerte sind. Ferner wird eine weitere Hilfsfunktion eingeführt

$$w(\lambda) = -\int u(s,\lambda)\,\psi(s)\,ds = -\int (u\,L[u] + \lambda\,p\,u^2)\,ds.$$

Wegen $u(s,R)=F_1$ und (5.2) gilt $w(R) = -\int \psi\,F_1\,ds = 0$. Weiter ist $w(0) = -\int u(s,0)\,L[u(s,0)]\,ds > 0$ nach der über L getroffenen Voraussetzung (4.1).

Nun wird noch gezeigt, daß $w(\lambda)$ für Werte von λ, die nicht Eigenwerte sind, eine positive Ableitung besitzt. Daraus folgt dann, daß zwischen 0 und R mindestens ein Eigenwert liegen muß; denn sonst könnte nicht $w(0)>0$ und $w(R)=0$ sein. Das ist dann die Behauptung

$$R \geqq \lambda_1 \qquad (5.4).$$

Nach dem Reziprozitätssatz (4.7) ist nämlich für zwei voneinander verschiedene Parameterwerte λ und λ^*

$$\int u(s,\lambda)\,L[u(s,\lambda^*)] - u(s,\lambda^*)\,L[u(s,\lambda)]\,ds = 0\,.$$

Drückt man $L[u]$ nach (5.3) aus, so folgt

$$\int \psi(s)\,\{u(s,\lambda) - u(s,\lambda^*)\}\,d s + (\lambda^* - \lambda) \int p\, u(s,\lambda)\, u(s,\lambda^*)\, d s = 0$$

$$\frac{w(\lambda) - w(\lambda^*)}{\lambda - \lambda^*} = \int p\, u(s,\lambda)\, u(s,\lambda^*)\, d s\,.$$

Grenzübergang ergibt die Behauptung

$$\frac{d w}{d \lambda} = \int p\, u^2(s,\lambda)\, d s > 0.$$

6. Weitere Untersuchung der Zahlenfolge μ_n. Für die F_n aus (4.8) gilt:

$$\int p\, F_k\, F_{n-k}\, d s = a_n \text{ ist von } k \text{ unabhängig} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6.1),$$

denn

$$\int p\, F_k\, F_l\, d s = \int p(s)\, F_k(s) \left[\int G(s,t)\, p(t)\, F_{l-1}(t)\, d t\right] d s$$

$$= \int \left[\int p(s)\, F_k(s)\, G(t,s)\, d s\right] p(t)\, F_{l-1}(t)\, d t = \int p\, F_{k+1}\, F_{l-1}\, d t\,.$$

Die Einführung der Größen a_n und die Schlüsse, die (6.3) ergeben, gehen auf H. A. Schwarz [S. 5], S. 247 bis 252 zurück. Die Größen a_n sind sämtlich positive Zahlen, denn je nachdem der Index gerade oder ungerade ist, gelten die Darstellungen

$$\left.\begin{aligned} a_{2n} &= \int p\, F_n^2\, d s > 0 \\ a_{2n+1} &= -\int F_{n+1}\, L[F_{n+1}]\, d s > 0 \text{ nach (4.1)} \end{aligned}\right\} (n = 0, 1, 2, \ldots)\,.$$

Die durch

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = \mu_n \qquad (n = 1, 2, \ldots) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6.2)$$

definierten Zahlen μ_n bilden eine monoton abnehmende Folge. Denn nach der Voraussetzung über L gilt: $Q_1 = -\int w\, L[w]\, d s \geqq 0$ für alle den Randbedingungen genügenden Funktionen w und $Q_2 = \int p\, w^2\, d s \geqq 0$ für alle Funktionen w. Man darf also bei Q_1 für w die Funktionen $F_1, F_2, \ldots$ einsetzen und bei Q_2 auch noch F_0 hinzunehmen. Setzt man nun $w = \alpha F_n + \beta F_{n+1}$, so erhält man zwei positiv definite quadratische Formen in den Parametern α und β:

$$Q_1 = a_{2n-1}\, \alpha^2 + 2\, a_{2n}\, \alpha \beta + a_{2n+1}\, \beta^2 \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots),$$

$$Q_2 = a_{2n}\, \alpha^2 + 2\, a_{2n+1}\, \alpha \beta + a_{2n+2}\, \beta^2 \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots).$$

Die Koeffizientendeterminanten sind also positiv, d. h.

$$a_{2n-1}\, a_{2n+1} \geqq a_{2n}^2 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

und

$$a_{2n}\, a_{2n+2} \geqq a_{2n+1}^2 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

oder[3])

$$\mu_1 \geqq \mu_2 \geqq \mu_3 \geqq \ldots \geqq \lambda_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6.3).$$

Da die μ_n mit geradem n und die mit ungeradem n eine verschiedene Bauart haben (es ist z. B. μ_2 durch (4.10) gegeben, während

$$\mu_1 = \frac{\int p\, F_0^2\, d s}{\int p\, F_0\, F_1\, d s} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6.4)$$

ist), erhalten wir zwei scheinbar verschiedene, in Wirklichkeit aber gleichwertige Minimalprinzipien für λ_1. Ist w eine die Randbedingungen erfüllende Funktion (w entspricht dem obigen F_1), so gilt nach (6.4) und (4.10)

$$\mu_1[w] = \frac{\int \frac{1}{p} (L[w])^2\, d s}{-\int w\, L[w]\, d s} \geqq \lambda_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6.5)$$

und

$$\mu_2[w] = R[w] = \frac{-\int w\, L[w]\, d s}{\int p\, w^2\, d s} \geqq \lambda_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6.6).$$

[3]) Der Sachverhalt $\mu_n > \mu_{n+1} \geqq \mu_{n+2}$ findet sich im Spezialfall der Gleichung für Transversalschwingungen von Stäben auch bei Hohenemser-Prager [H. 4]. Setzt man $F_1 = y_0$, $F_2 = y_1$, $L[\varphi] = (E J \varphi'')''$ und das hier benutzte p gleich dem dortigen q, so sind die dort unter (8), (9), (10) genannten Ausdrücke gleich den hier gebrauchten Größen μ_2, μ_3, μ_4. Der Beweis für die Tatsache $\mu_2 > \mu_3 \geqq \mu_4 \geqq \lambda_1$ wird dort durch Heranziehen des Entwicklungssatzes erbracht. Auf die Einordnung der Hohenemser-Pragerschen Aussage in die Theorie der schrittweisen Näherungen wies bereits Herr Doz. Dr. K. Klotter in seinem Vortrage auf der Deutschen Physiker- und Mathematikertagung in Stuttgart 1935 hin.

Man kann hier auch die Greensche Funktion einführen und erhält dann die Minimalprinzipien in einer Gestalt wie bei G. Hamel ([H. 1] S. 88, Satz 24).

7. Aufstellung einer unteren Schranke für λ_1. Hierzu wird eine Ausgangsfunktion H_0 betrachtet, die zu $p f_1$ orthogonal ist (f_1 bedeutet eine zu λ_1 gehörige Eigenfunktion von (1.2)). Es wird vorausgesetzt, daß λ_1 ein einfacher Eigenwert ist. Entsprechend den F_n, a_n, μ_n werden die H_n, b_n, ν_n definiert durch ($H_1, H_2, \ldots$ sollen die Randbedingungen erfüllen)

$$L[H_n] + p\,H_{n-1} = 0; \qquad b_n = \int p\,H_k\,H_{n-k}\,d s; \qquad \nu_n = \frac{b_{n-1}}{b_n} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \quad . \; . \; (7.1).$$

Mit H_0 sind alle H_n zu $p f_1$ orthogonal:

$$\begin{aligned}\int H_n\,p\,f_1\,d s &= \int p(s) f_1(s) \left[\int p(t)\,H_{n-1}(t)\,G(t,s)\,d t\right] d s \\ &= \int p(t)\,H_{n-1}(t) \frac{f_1(t)}{\lambda_1}\,d t = \lambda_1^{-n} \int H_0\,p\,f_1\,d s = 0.\end{aligned}$$

Die oben für die F_n abgeleiteten Sätze gelten natürlich auch für die H_n; für die ν_n aber gilt nicht nur $\nu_n \geqq \nu_{n+1} \geqq \lambda_1$, sondern sogar $\nu_n \geqq \lambda_2$ für alle n. Denn führt man jetzt die Betrachtung mit den $u(s,\lambda)$ durch, so gilt für die (5.1) entsprechende Funktion $\psi = -p\,H_0 + \nu_2\,p\,H_1$ die Beziehung:

$$\int \psi\,f_1\,d s = 0;$$

das ist gerade die Bedingung, daß die (5.3) entsprechende Gleichung auch für den Eigenwert $\lambda = \lambda_1$ lösbar ist. Für die jetzt aufzustellende Funktion $w(\lambda)$ ist also λ_1 kein Ausnahmewert[3*]). Es muß also zwischen 0 und ν_2 außer λ_1 noch mindestens ein anderer Eigenwert liegen, d. h. $\nu_2 \geqq \lambda_2$ und ebenso $\nu_n \geqq \lambda_2$ für alle n.

Einschaltung: Für die numerische Rechnung kann man bei Kenntnis des ersten Eigenwertes λ_1 als H_0 die Funktion $F_0 - \lambda_1 F_1$ verwenden. J. Koch [K. 3], S. 215, und [K. 4] S. 10 empfiehlt, zur genäherten Berechnung des zweiten Eigenwertes eine Funktion H_0 zu benutzen, die zu dem letzten berechneten $p F_n$ (also der besten Näherung, die man für die erste Eigenfunktion f_1 hat) orthogonal ist und zu dieser nach (7.1) verbesserte Näherungen zur zweiten Eigenfunktion zu bestimmen, wobei man vorsichtshalber nach jedem Schritt die Komponente der ersten Eigenfunktion wieder abziehen muß, d. h. man rechnet nach

$$\left.\begin{aligned} & L[H_k^*] + p\,H_{k-1} = 0 \\ & H_k = H_k^* - \frac{F_n}{\int p\,F_n^2\,d s} \int (H_k^*\,p\,F_n)\,d s \\ & H_k^* \text{ erfüllt die Randbedingungen} \end{aligned}\right\} \; (k = 1, 2, \ldots) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7.2).$$

Entsprechend verfährt man bei den höheren Eigenwerten.

Für einen bequemeren Beweis der Endformel (7.4) jedoch wird hier gesetzt

$$H_0 = F_0 - c\,f_1 \qquad \text{mit} \qquad c = \int p\,f_1\,F_0\,d s,$$

wobei die Eigenfunktion f_1 durch $\int p\,f_1^2\,d s = 1$ normiert angenommen ist. Diese Ausgangsfunktion H_0 ist offenbar zu $p\,f_1$ orthogonal. Die H_n lassen sich durch die F_n ausdrücken.

$$\begin{aligned} H_1(s) &= -\int p(t)\,H_0(t)\,G(s,t)\,d t = -\int p(t)\,F_0(t)\,G(s,t)\,d t + \\ &+ c \int p(t)\,f_1(t)\,G(s,t)\,d t = F_1(s) - \frac{c}{\lambda_1} f_1(s); \end{aligned}$$

entsprechend $H_n = F_n - c\,\lambda_1^{-n} f_1$. Ferner ist unter Benutzung der Orthogonalität von H_0 und H_n zu $p\,f_1$

$$a_n = \int p\,F_0\,F_n\,d s = \int p\,(H_0 + c\,f_1)(H_n + c\,\lambda_1^{-n} f_1)\,d s = b_n + c^2\,\lambda_1^{-n},$$

also

$$b_n - \lambda_1\,b_{n+1} = a_n - \lambda_1\,a_{n+1} \text{ [4])} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7.3).$$

[3*]) Herr Prof. Dr. E. Kamke hat mich liebenswürdigerweise darauf aufmerksam gemacht, daß noch die Stetigkeit von $u(s,\lambda)$ für $\lambda = \lambda_1$ gezeigt werden muß. $u(s,\lambda)$ ist zwar für $\lambda = \lambda_1$ nicht eindeutig definiert, aber bei Aufstellen der Lösungsformel mit Hilfe des lösenden Kernes (vgl. C. 4 S. 119/120, Gl. (62) u. (64) erkennt man, daß $u(s,\lambda)$ für $\lambda \to \lambda_1$ einer endlichen Grenzfunktion zustrebt. Definiert man als $u(s,\lambda_1)$ diese Grenzfunktion, so ist $u(s,\lambda)$ auch für $\lambda = \lambda_1$ stetig.

[4]) Temple-Bickley ([T. 2] S. 84) verwenden hier und in der daran anknüpfenden Schlußweise die unrichtige Beziehung $b_n = a_n - \lambda_1\,a_{n+1}$ an Stelle von (7.3).

Eine Umrechnung ergibt

$$\left(\frac{\mu_n - \mu_{n+1}}{\mu_{n+1} - \lambda_1} + 1\right)\mu_{n+1} = \frac{\mu_n - \lambda_1}{\mu_{n+1} - \lambda_1}\,\mu_{n+1} = \frac{a_{n-1} - \lambda_1 a_n}{a_n - \lambda_1 a_{n+1}} = \frac{b_{n-1} - \lambda_1 b_n}{b_n - \lambda_1 b_{n+1}}$$

$$= \frac{\nu_n - \lambda_1}{\nu_{n+1} - \lambda_1}\,\nu_{n+1} \geqq \nu_{n+1} \geqq \lambda_2,$$

also

$$\mu_n - \mu_{n+1} \geqq \left(\frac{\lambda_2}{\mu_{n+1}} - 1\right)(\mu_{n+1} - \lambda_1).$$

Kennt man eine untere Schranke l_2 für den zweiten Eigenwert λ_2, die aber so gut sein muß, daß $l_2 > \mu_{n+1}$ ist, so erhält man die Fehlerabschätzung

$$0 \leqq \mu_{n+1} - \lambda_1 \leqq \frac{\mu_n - \mu_{n+1}}{\dfrac{l_2}{\mu_{n+1}} - 1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7.4).$$

Dieses Ergebnis läßt sich bequem herleiten, wenn man den Entwicklungssatz (Entwickelbarkeit von $F_0(s)$ nach den Eigenfunktionen) benutzt. (Ein solcher Beweis ist durchgeführt bei Temple-Bickley [T. 2] S. 21 bis 23.) Da jedoch bei vielen technischen Problemen die Anwendbarkeit des Entwicklungssatzes nicht gesichert ist (z. B. infolge Verletzung der geforderten Stetigkeitsbedingungen der auftretenden Funktionen oder Ausgehen von einer Funktion F_0, die nicht die Randbedingungen erfüllt), ist es wichtig, daß man (7.4) auch ohne Heranziehung des Entwicklungssatzes beweisen kann.

8. Rechnungsgang und Beispiel. 1. Festlegung der Näherungsfunktionen F_0 und F_1. Ist die vorgelegte Differentialgleichung sehr einfach gebaut, so kann man etwa von $F_0 = 1$ ausgehend nach (4.8) $F_1, F_2, \ldots$ und weitere F_n berechnen. Jedes weitere F_ν erfordert dabei die Lösung eines Randwertproblems. Bei gewöhnlichen Differentialgleichungen kann die Lösung des Randwertproblems oft bequem graphisch durchgeführt werden (Seileckverfahren, Mohrsches Verfahren usw.). Hat jedoch das vorgelegte Eigenwertproblem eine kompliziertere Form, so kann man sich ein Paar von Funktionen F_0, F_1 in jedem Falle folgendermaßen verschaffen: Man wählt eine Funktion F_1, die die Randbedingungen erfüllt (und nach Möglichkeit den erwarteten Verlauf der ersten Eigenfunktion hat), und berechnet F_0 nach (4.8)

$$F_0 = -\frac{1}{p}\,L[F_1].$$

Meist kann man bei F_1 mit willkürlichen Konstanten multiplizierte, die Randbedingungen erfüllende Funktionen hinzufügen und diese Konstanten dann so bestimmen, daß auch noch F_0 die Randbedingungen erfüllt. (Dadurch erzielt man oft wesentlich bessere Resultate.)

2. Man berechnet obere Schranken für λ_1:

$$\mu_1 = \frac{\int p\,F_0^2\,ds}{\int p\,F_0\,F_1\,ds}$$

und

$$\mu_2 = \frac{\int p\,F_0\,F_1\,ds}{\int p\,F_1^2\,ds} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8.1).$$

Dann ist

$$\mu_1 \geqq \mu_2 \geqq \lambda_1.$$

3. Zur Berechnung einer unteren Schranke für λ_1 benötigt man eine (grobe) untere Schranke l_2 für den zweiten Eigenwert λ_2, die nach einer der im sechsten Abschnitt genannten Methoden gefunden wird. Sie muß allerdings so gut sein, daß $l_2 > \mu_2$ erfüllt ist. Dann gilt

$$\lambda_1 \geqq \mu_2 - \frac{\mu_1 - \mu_2}{\dfrac{l_2}{\mu_2} - 1} \quad \ldots \ldots \quad (8.2).$$

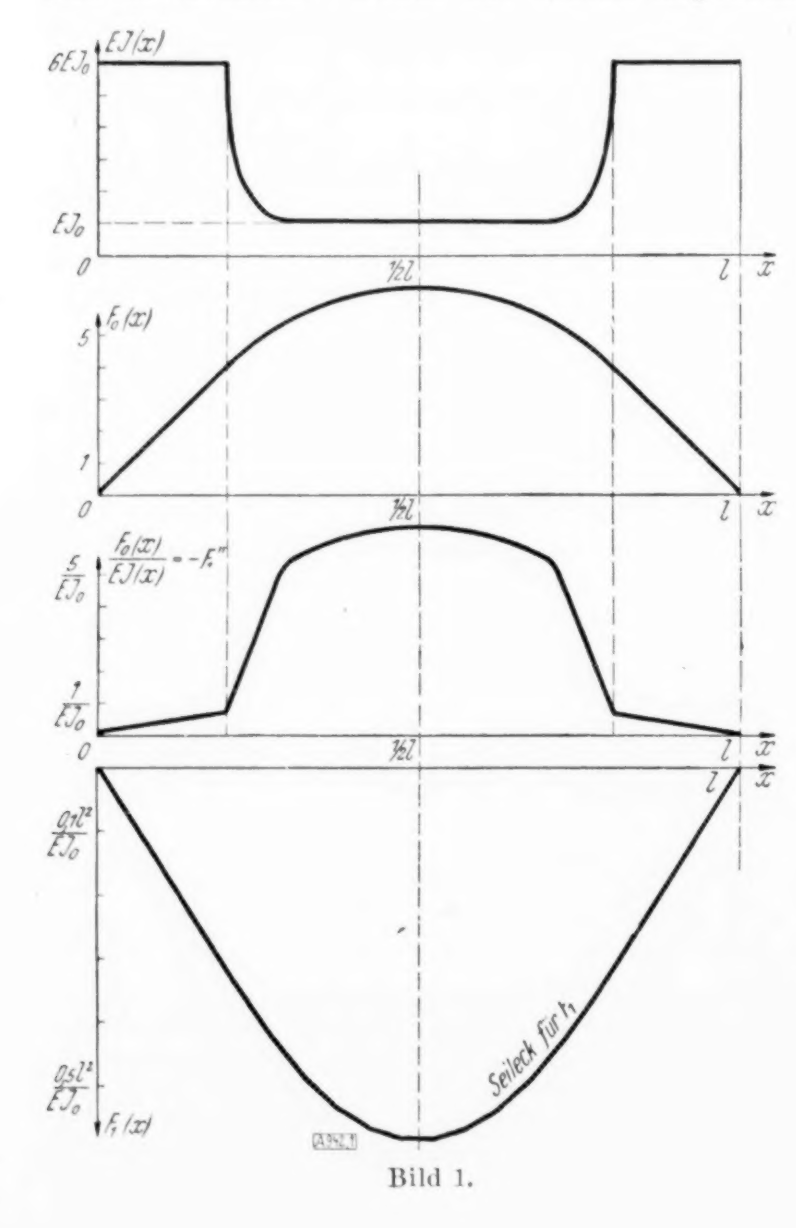


Bild 1.

Beispiel. Als Beispiel für die graphische Durchführung der Methode diene das Knickproblem für einen beiderseits gelenkig gelagerten Stab der Länge l (z. B. Schubstange), dessen veränderliche Biegesteifheit $EJ(x)=\frac{1}{p(x)}$ nur graphisch gegeben ist (vgl. Bild 1). Zur Lösung von

$$f''+\lambda p(x) f=0, \qquad f(0)=f(l)=0$$

wird eine die erwartete Form der Ausbiegungslinie bei der Knickung ungefähr wiedergebende Funktion $F_0(x)$ angenommen (vgl. Bild 1), $\frac{F_0}{EJ}=p F_0$ gebildet $\left(\text{in Einheiten von } \frac{1}{EJ_0}\right.$ aufgetragen, wobei EJ_0 die kleinste Biegesteifheit ist$\left.\right)$ und durch Zeichnen eines Seilecks zweimal integriert. Hat man so F_1 aus $F_1''+p F_0=0$ ermittelt, so kann man die Größen

$$a_0=\int_0^l p F_0^2\, dx, \qquad a_1=\int_0^l p F_0 F_1\, dx, \qquad a_2=\int_0^l p F_1^2\, dx$$

etwa rechnerisch ermitteln $\left(\text{hier unter Benutzung der Werte bei } x=0, \frac{1}{20} l, \frac{2}{20} l, \ldots, l \text{ nach}\right.$ der Simpsonschen Regel$\left.\right)$. Es folgt

$$a_0=18{,}57 \frac{l}{EJ_0}; \qquad a_1=1{,}615 \frac{l^3}{(EJ_0)^2}; \qquad a_2=0{,}1407 \frac{l^5}{(EJ_0)^3};$$

$$\mu_1=\frac{a_0}{a_1}=11{,}50 \frac{EJ_0}{l^2}; \qquad \mu_2=\frac{a_1}{a_2}=11{,}48 \frac{EJ_0}{l^2}.$$

Für λ_2 erhält man leicht eine untere Schranke l_2 aus dem Vergleichsproblem $f''+\frac{\lambda f}{EJ_0}=0$, $f(0)=f(l)=0$ zu

$$l_2=4\pi^2 \frac{EJ_0}{l^2}.$$

Formel (7.4) liefert dann als Fehlerschranke für μ_2:

$$\mu_2-\lambda_1 \leqq 0{,}01 \frac{EJ_0}{l^2} \qquad \text{oder} \qquad 11{,}47 \frac{EJ_0}{l^2} \leqq \lambda_1 \leqq 11{,}48 \frac{EJ_0}{l^2}.$$

2. Abschnitt:
Das Ritzsche Verfahren, obere und untere Schranken.

In diesem Abschnitt wird auf den Zusammenhang zwischen Differentialgleichungen und Variationsrechnung und auf die Nutzbarmachung dieses Zusammenhanges für die numerische Rechnung eingegangen. Die (nicht leichte) Frage nach der Lösbarkeit des Variationsproblems wird hier nicht behandelt, sondern stets die Existenz einer Lösung des Variationsproblems vorausgesetzt. Zunächst werden in **9** und **10** die Ritz-Galerkinschen Gleichungen auf eine mehr beschreibende Art aufgestellt, ohne Bezugnahme auf die im ersten Abschnitt gegebene Theorie der schrittweisen Näherungen. Dann werden in **11** die Ritz-Galerkinschen Gleichungen auf eine andere Art, nämlich im Zusammenhang mit den in **6** genannten Minimalprinzipien, nochmals (allerdings für die speziellere, in **4** genannte Problemklasse) hergeleitet, und diese neue Herleitung wird zu den weiteren Beweisen nützlich sein. Die Minimalprinzipien in **6** eignen sich ferner zu einer kurzen Herleitung der von Grammel aufgestellten Gleichungen in **12**. Bei der Darstellung wird benutzt, daß die Randbedingungen homogen sind.

9. Erste Fassung der linearen Gleichungen des Ritzschen Verfahrens. Die vorgelegte Differentialgleichung (1.1) lasse sich als Eulersche Differentialgleichung eines Variationsproblems

$$I[\varphi]=\int (D[\varphi]+\lambda H[\varphi])\, ds=\text{Extr.} \qquad (9.1)$$

mit gewissen Randbedingungen schreiben, wobei D und H quadratische Differentialausdrücke in φ sind, deren Eulersche Variationsausdrücke L und M sind. Die Variation $\varphi=f+\varepsilon\cdot\eta$, wo f eine Lösung des Variationsproblems (9.1) ist (Existenz von f vorausgesetzt), führe bis auf in ε quadratische Glieder bei Anwendung der üblichen Teilintegration auf

$$\left.\begin{aligned} \delta I[\varphi] &= I[f+\varepsilon\eta]-I[f] \\ &= \varepsilon\left\{\int \eta\,(L[f]+\lambda M[f])\, ds+\text{Randausdrücke}\right\}+\varepsilon^2\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (9.2).$$

Fordert man nun, daß η so viele Randbedingungen erfüllt, wie zum Verschwinden der in der geschweiften Klammer stehenden Randausdrücke nötig ist, so ist die notwendige Bedingung für Bestehen eines Extrems (das Verschwinden des Faktors von ε) erfüllt, wenn f der Differentialgleichung (1.1) genügt. Über die Anzahl der Randbedingungen, die η erfüllen muß, erhält man Aufschluß, wenn man die Randausdrücke hinschreibt, z. B. bei der selbstadjungierten Differentialgleichung

$$L[f] + \lambda p f \equiv -(k_2 f'')'' + (k_1 f')' - k_0 f + \lambda p f = 0$$

und vorgegebenen Randbedingungen; bei $x = 0$ und $x = a$ betrachtet man das zugehörige Variationsproblem

$$I[\varphi] = \int_0^a (k_2 f''^2 + k_1 f'^2 - (-k_0 + \lambda p) f^2)\, dx = \text{Extr.}$$

Die Umformung (9.2) ergibt jetzt

$$\left.\begin{aligned} I[f + \varepsilon\eta] - I[f] = -2\varepsilon \Big\{ \int_0^a \eta\, (L[f] + \lambda p f)\, dx \\ + [k_2 f'' \eta' - (k_2 f'')' \eta + k_1 f' \eta]_0^a \Big\} + \varepsilon^2 I[\eta] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (9.3).$$

Es braucht keineswegs von η gefordert zu werden, daß es ebenso wie f den sämtlichen Randbedingungen des Problems genügt, sondern nur so vielen Bedingungen, daß die in den Randgliedern auftretenden Produkte zwischen den Ableitungen von f und denen von η (die „bilinear concomitant") verschwinden.

Bei einer Differentialgleichung zweiter Ordnung ($k_2 \equiv 0$) und beispielsweise den Randbedingungen $f(0) = 0$, $f'(a) = 0$ muß η die Bedingung $\eta(0) = 0$, aber nicht notwendig $\eta'(a) = 0$ erfüllen, damit $[k_1 f' \eta]_0^a = 0$ erfüllt ist. Bei $-(k_2 f'')'' + \lambda p f = 0$ und etwa den Randbedingungen $f(0) = f'(0) = f(a) = f''(a) = 0$ muß η zum Erfüllen von

$$[k_2 f'' \eta' - (k_2 f'')' \eta + k_1 f' \eta]_0^a = 0$$

die Bedingungen $\eta(0) = \eta'(0) = \eta(a) = 0$ erfüllen, aber $\eta''(a)$ darf $\neq 0$ sein.

Von den Randbedingungen des Problems erfüllt dann die Vergleichsfunktion $\varphi = f + \varepsilon\eta$ dieselben Bedingungen wie η. Beim Ritzschen Verfahren sucht man nun eine Vergleichsfunktion φ so zu bestimmen, daß $I[\varphi]$ dem Extremwert möglichst nahe kommt; man macht dabei gewöhnlich einen Ansatz

$$\varphi = \sum_{\nu=1}^{r} c_\nu \psi_\nu(s) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9.4)$$

(der allgemeinere nichtlineare Ansatz $\varphi = \varphi(s, c_1, c_2, \ldots, c_m)$ wird selten verwendet, da seine Durchführung mühsam wird, vgl. jedoch die Beispiele I, III, IV). Die Funktionen ψ_ν müssen dabei folgende Bedingungen erfüllen:

1. den oben für η vorgeschriebenen Randbedingungen genügen,

2. so oft differentiierbar sein, wie es zur Bildung von $\int D[\psi_\nu]\, ds$ und $\int H[\psi_\nu]\, ds$ nötig ist (enthält z. B. D die ersten Ableitungen, so muß ψ_ν stetig und wenigstens stückweise differentiierbar sein),

3. voneinander linear unabhängig sein.

Man sucht dann $I\left[\sum_{\nu=1}^{m} c_\nu \psi_\nu\right]$ als Funktion der m Veränderlichen c_ν zum Extremum zu machen und hat dementsprechend die Bedingungen

$$\frac{\partial I\left[\sum_{\nu=1}^{m} c_\nu \psi_\nu\right]}{\partial c_\varrho} = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, m) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9.5).$$

Da die in $I[\varphi]$ auftretenden Differentialausdrücke $D[\varphi]$ und $H[\varphi]$ in φ quadratisch sind, ist dieses Gleichungssystem (9.5) für die c_ϱ linear und hat die Gestalt

$$\sum_{\nu=1}^{m} (a_{\varrho\nu} - \Lambda b_{\varrho\nu})\, c_\nu = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, m) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9.6).$$

Es ist homogen in den c_ν und besitzt nur eine von identisch Null verschiedene Lösung, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet:

$$\Delta_m(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \Lambda b_{11} & a_{12} - \Lambda b_{12} & \ldots & a_{1m} - \Lambda b_{1m} \\ a_{21} - \Lambda b_{21} & a_{22} - \Lambda b_{22} & \ldots & a_{2m} - \Lambda b_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} - \Lambda b_{m1} & a_{m2} - \Lambda b_{m2} & \ldots & a_{mm} - \Lambda b_{mm} \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9.7),$$

das ist eine algebraische Gleichung m-ten Grades für Λ, deren Wurzeln nach einem Satz der Algebra stets reell sind, wenn $a_{\varrho\nu} = a_{\nu\varrho}$ und $b_{\varrho\nu} = b_{\nu\varrho}$ ist. Die Wurzeln der Größe nach geordnet seien

$$L_1^{(m)} \leq L_2^{(m)} \leq L_3^{(m)} \leq \ldots \leq L_m^{(m)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9.8).$$

Eine zu $L_\nu^{(m)}$ gehörige nach (9.4) gebildete Näherungsfunktion werde mit $\psi_\nu^{(m)}$ bezeichnet.

10. Zweite (Galerkinsche) Fassung der Ritzschen Gleichungen. Den Ausgangspunkt bildet wieder die Umformung (9.2). Jetzt wird nicht φ, sondern f näherungsweise angesetzt in der Gestalt

$$f(s) \approx \psi(s) = \sum_{\nu=1}^{m} c_\nu \psi_\nu(s) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10.1),$$

man schränkt den Bereich der Vergleichsfunktionen ein auf die Gesamtheit der durch den Ansatz (10.1) erfaßbaren Funktionen; ebenso wird die Funktion η jetzt nur aus dieser kleineren Klasse (10.1) genommen. Die c_ν sollen nun so bestimmt werden, daß die mit ihnen nach (10.1) gebildete Funktion $\psi(s)$ der Lösung $f(s)$ des Variationsproblems möglichst nahe kommt, d. h. daß die notwendigen Bedingungen (Verschwinden der geschweiften Klammer in (9.2)) für möglichst viele Vergleichsfunktionen $\psi + \varepsilon\eta$ erfüllt sind. Wählt man als η nacheinander die Funktionen $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$, so erhält man aus (9.2) die Gleichungen des Ritzschen Verfahrens in der Galerkinschen Gestalt (vgl. Hencky [H. 2])

$$\int \psi_\varrho \Big\{ L\Big[\sum_{\nu=1}^{m} c_\nu \psi_\nu\Big] + \Lambda M\Big[\sum_{\nu=1}^{m} c_\nu \psi_\nu\Big]\Big\} ds = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, m) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10.2).$$

Hierbei sind die Randausdrücke der geschweiften Klammer in (9.2) bereits fortgelassen. Da bei diesen jetzt f durch den Ansatz (10.1) zu ersetzen ist, kann nicht mehr benutzt werden, daß die Lösung f von (1.1) den Randbedingungen genügt, sondern man muß das Erfülltsein der Randbedingungen bei den ψ_ν fordern. (Im allgemeinen sind die Randbedingungen des Problems so beschaffen, daß die Randausdrücke in (9.2) verschwinden, wenn sowohl $f \approx \sum_{\nu=1}^{m} c_\nu \psi_\nu$ als auch $\eta = \psi_\nu$ den Randbedingungen genügen. Andernfalls treten zu den Gl. (10.2) noch Zusatzglieder.)

Zur Anwendbarkeit von (10.2) müssen also die ψ_ν folgende Bedingungen erfüllen:

1. den für die Lösung f des Eigenwertproblems vorgeschriebenen Randbedingungen genügen,

2. so oft differentiierbar sein, daß man $L[\psi_\nu]$ und $M[\psi_\nu]$ bilden kann (enthält z. B. L die zweiten Ableitungen, so müssen die ψ_ν stetige erste und wenigstens stückweise stetige zweite Ableitungen besitzen),

3. voneinander linear unabhängig sein.

Hat man Funktionen ψ_ν, die diese Forderungen erfüllen, so ist die Gestalt (10.2) für die praktische Rechnung bequemer als die Gl. (9.5), da man nicht erst eine quadratische Funktion in den c_ν aufstellen und nach den c_ϱ differentiieren muß, sondern gleich die linearen Gleichungen für die c_ϱ erhält.

Es ist zu beachten, daß nicht immer die Gl. (10.2) und (9.5) übereinstimmen. Die Forderungen 1. und 2. in **10** für die ψ_ν sind schärfer als die entsprechenden in **9**. Daher ist es oft leichter und bequemer, Funktionen aufzustellen, die **9** genügen, als solche, die **10** erfüllen. Die ψ_ν von **9** brauchen nur weniger Randbedingungen zu erfüllen als die ψ_ν von **10**. Besitzen ferner die ψ_ν nicht die nötigen Differentiierbarkeitseigenschaften, so können durch die bei (9.2) nötigen Teilintegrationen Zusatzglieder hereinkommen, so daß die Gleichungen in der Form (10.2) falsch werden. In der Form (9.5) dagegen bleiben sie gültig. Als einfachstes Beispiel sei genannt $f'' + \lambda f = 0$, $f(-1) = f(1) = 0$. Wählt man $\psi_1 = 1 - |x|$, $\psi_2 = (1 - |x|)x$, so sind die Gl. (9.5) anwendbar, (10.2) dagegen wegen der Unstetigkeit der Ableitung von ψ_1

nicht. Daß dieser Sachverhalt nicht nur bei diesem eigens zu diesem Zweck betrachteten Beispiel auftritt, zeigt das Beispiel V, bei dem auch die Galerkinschen Gleichungen in der Fassung (10.2) nicht anwendbar sind.

Mit den Abkürzungen

$$a_{\varrho\nu} = -\int \psi_\varrho L[\psi_\nu]\, ds \quad \text{und} \quad b_{\varrho\nu} = \int \psi_\varrho M[\psi_\nu]\, ds \quad \ldots \ldots \quad (10.3)$$

nimmt das Galerkinsche Gleichungssystem (10.2) die gleiche Gestalt wie (9.6) an:

$$\sum_{\nu=1}^{m} (a_{\varrho\nu} - \Lambda b_{\varrho\nu})\, c_\nu = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, m) \quad \ldots \ldots \quad (10.4).$$

Wieder (wie bei (9.8)) seien die Wurzeln der gleich Null gesetzten Koeffizientendeterminante (9.7) der Größe nach mit $L_1^{(m)}, L_2^{(m)}, \ldots, L_m^{(m)}$ bezeichnet (sie sind reell, wenn für L und M die Beziehung (4.7) gilt, also $a_{\varrho\nu} = a_{\nu\varrho}$ und $b_{\varrho\nu} = b_{\nu\varrho}$ ist); die erste Näherung $L_1^{(1)}$ ist identisch mit dem Rayleighschen Wert

$$L_1^{(1)} = \frac{a_{11}}{b_{11}} = \frac{-\int \psi_1 L[\psi_1]\, ds}{\int \psi_1 M[\psi_1]\, ds} = R[\psi_1] \quad \ldots \ldots \quad (10.5).$$

Ritz selbst hat bei einem Beispiel bereits die linearen Gleichungen in der Galerkinschen Fassung (10.2) stehen ([R. 1] S. 38, Gl. (41), hierauf weist G. Vogelpohl, VDI-Forschungsheft 386, S. 9 hin), er hat jedoch den allgemeinen Gedanken, soviel mir bekannt, nirgends explizit ausgesprochen.

11. Andere Herleitung der Ritzschen Gleichungen. Die Theorie der schrittweisen Näherungen hat für den ersten Eigenwert λ_1 der spezielleren, in **4** genannten Problemklasse die Minimaleigenschaft (6.6) ergeben:

$$\lambda_1 = \operatorname{Min} \mu_2[w] = \operatorname{Min} \frac{-\int w\, L[w]\, ds}{\int p\, w^2\, ds} \quad \ldots \ldots \quad (11.1),$$

wobei w den Bereich aller Funktionen durchläuft, die den Randbedingungen genügen und so oft differentiierbar sind, wie es zur Bildung des Zählerintegrals in (11.1) erforderlich ist. Die Funktion $w \equiv 0$ war dabei von der Konkurrenz ausgeschlossen. (Zähler- und Nennerintegral in (11.1) sollen zur Abkürzung mit Z und N bezeichnet werden.) Nun wird w auf den spezielleren Funktionsbereich

$$w(s) = \sum_{\nu=1}^{m} c_\nu \psi_\nu(s) \quad \ldots \ldots \quad (11.2)$$

eingeschränkt, wobei die $\psi_\nu(s)$ fest vorgegebene, den in **10** genannten Bedingungen 1, 2, 3 genügende Funktionen sind. Die Konstanten c_ν sollen so bestimmt werden, daß das mit (11.2) gebildete $\mu_2[w]$ einen möglichst kleinen Wert annimmt. Dieser Wert heiße Λ, und es ist $\Lambda \geqq \lambda_1$, da die Funktionenklasse (11.2) kleiner ist als die in (11.1) für w zugelassene Funktionenklasse. Die c_ν müssen also der Forderung

$$0 = \frac{\partial \mu_2\left[\sum_{\nu=1}^{m} c_\nu \psi_\nu(s)\right]}{\partial c_\varrho} = \frac{\partial\left(\frac{Z}{N}\right)}{\partial c_\varrho} = \frac{\frac{\partial Z}{\partial c_\varrho} - \frac{\partial N}{\partial c_\varrho}\cdot\frac{Z}{N}}{N} = \frac{\frac{\partial Z}{\partial c_\varrho} - \Lambda \frac{\partial N}{\partial c_\varrho}}{N} \quad \ldots \quad (11.3)$$

genügen. Beim Einsetzen der Werte von Z und N erhält man

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial c_\varrho} \int \left\{ \Big(\sum_{\nu=1}^{m} c_\nu \psi_\nu\Big)\Big(\sum_{\nu=1}^{m} c_\nu L[\psi_\nu]\Big) + \Lambda p \Big(\sum_{\nu=1}^{m} c_\nu \psi_\nu\Big)^2 \right\} ds = 0 \\ &\int \left\{ \psi_\varrho \sum_{\nu=1}^{m} c_\nu L[\psi_\nu] + L[\psi_\varrho]\cdot \sum_{\nu=1}^{m} c_\nu \psi_\nu + 2\Lambda p \Big(\sum_{\nu=1}^{m} c_\nu \psi_\nu\Big) \psi_\varrho \right\} ds = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (11.4).$$

Wegen (4.7) sind die ersten beiden Glieder im Integranden einander gleich und es folgt

$$\int \psi_\varrho \left\{ \sum_{\nu=1}^{m} c_\nu L[\psi_\nu] + \Lambda p \sum_{\nu=1}^{m} c_\nu \psi_\nu \right\} ds = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, m) \quad \ldots \quad (11.5)$$

oder auch

$$\sum_{\nu=1}^{m} c_\nu \int \psi_\varrho \left\{ L[\psi_\nu] + \Lambda p \psi_\nu \right\} ds = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, m) \quad \ldots \quad (11.6).$$

Das sind gerade die Galerkinschen Gl. (10.2) in dem hier betrachteten Speziallfall

$$M[\psi_\nu] = p\ \psi_\nu .$$

Wendet man die gleichen Betrachtungen nicht auf $\mu_2[w]$, sondern auf den Quotienten

$$Q = \frac{-\int D[w]\,ds}{\int H[w]\,ds} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11.7)$$

an, so erhält man die Ritzschen Gleichungen in der ersten Fassung (9.6). Denn bezeichnet man wieder Zähler- und Nennerintegral von (11.7) mit Z, bzw. N, und das Minimum von Q bei der spezielleren Funktionenklasse (11.2) mit Λ, so gibt jetzt $\frac{\partial Q}{\partial c_\varrho} = 0$ mit Hilfe der (11.3) entsprechenden Umformung

$$\frac{\partial}{\partial c_\varrho}\int \left\{ D\left[\sum_{\nu=1}^{m} c_\nu \psi_\nu\right] + \Lambda\, H\left[\sum_{\nu=1}^{m} c_\nu \psi_\nu\right]\right\} ds = 0 ,$$

und das ist nach der Bezeichnungsweise (9.1) mit (9.6) identisch.

12. Die Grammelschen Gleichungen. In **6** waren für den ersten Eigenwert λ_1 zwei Minimalprinzipien (6.5) und (6.6) in Gestalt der beiden Ausdrücke $\mu_1[w]$ und $\mu_2[w]$ aufgestellt worden. Wenn man $\mu_2[w]$ durch einen Ansatz der Form (11.2) einen möglichst kleinen Wert zu erteilen sucht, erhält man die Ritz-Galerkinschen Gl. (11.5); sucht man

$$\mu_1[w] = \frac{\int \frac{1}{p}(L[w])^2\,ds}{-\int w\, L[w]\,ds} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12.1)$$

durch einen Ansatz

$$w = \sum_{\nu=1}^{m} c_\nu\, \psi_\nu(s) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12.2)$$

einen möglichst kleinen Wert zu erteilen, so erhält man die Grammelschen Gl. (12.3). Die $\psi_\nu(s)$ müssen wieder die drei in **10** genannten Forderungen 1, 2, 3 erfüllen, denn die Minimaleigenschaft (6.5) wurde nur für Funktionen w bewiesen, die die Randbedingungen erfüllen.

Bezeichnet man wieder Zähler- und Nennerintegral in (12.1) mit Z und N, und den kleinsten Wert, den μ_1 bei der Funktionenklasse (12.2) annehmen kann, mit Λ, so liefert

$$\frac{\partial \mu_1[w]}{\partial c_\varrho} = \frac{\partial \mu_1\left[\sum_{\nu=1}^{m} c_\nu \psi_\nu\right]}{\partial c_\varrho} = 0$$

unter Benutzung der Umformung (11.3):

$$\frac{\partial}{\partial c_\varrho}\int \left\{ \frac{1}{p}\left(L\left[\sum_{\nu=1}^{m} c_\nu \psi_\nu\right]\right)^2 + \Lambda \left(\sum_{\nu=1}^{m} c_\nu \psi_\nu\right)\left(L\left[\sum_{\nu=1}^{m} c_\nu \psi_\nu\right]\right)\right\} ds = 0 ,$$

$$\int \left\{ \frac{2}{p} L[\psi_\varrho]\cdot L\left[\sum_{\nu=1}^{m} c_\nu \psi_\nu\right] + \Lambda\left(\psi_\varrho L\left[\sum_{\nu=1}^{m} c_\nu \psi_\nu\right] + L[\psi_\varrho]\sum_{\nu=1}^{m} c_\nu \psi_\nu\right)\right\} ds = 0 .$$

Nach (4.7) ist im Integranden das zweite Glied gleich dem dritten:

$$\int L[\psi_\varrho]\left\{ \frac{1}{p} L\left[\sum_{\nu=1}^{m} c_\nu \psi_\nu\right] + \Lambda \sum_{\nu=1}^{m} c_\nu \psi_\nu \right\} ds = 0$$

oder auch

$$\sum_{\nu=1}^{m} c_\nu \int \frac{1}{p} L[\psi_\varrho]\,\{L[\psi_\nu] + \Lambda\, p\, \psi_\nu\}\, ds = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, m) \quad \ldots\ldots \quad (12.3).$$

Diese Grammelschen Gleichungen (in der Gestalt (12.6) entsprechen sie genau den Gl. (13) bei [G. 3] S. 37) sind ganz ähnlich gebaut wie die Galerkinschen Gl. (11.6) und unterscheiden sich von ihnen nur dadurch, daß im Integranden an Stelle des Faktors ψ_ϱ vor der geschweiften Klammer der Faktor $\frac{1}{p} L[\psi_\varrho]$ getreten ist.

Für die praktische Durchführung kann es bequem sein, von Funktionen $\eta_\nu(s)$ auszugehen, die durch

$$-L[\varphi_\nu] = p\,\eta_\nu \quad \text{(12.4)}$$

definiert sind. Man geht dann von den $\eta_\nu(s)$ zu den durch einen Iterationsschritt verbesserten Funktionen $\varphi_\nu(s)$ über mit Hilfe von Integrationen (die bei einer Anzahl von technisch wichtigen Klassen gewöhnlicher Differentialgleichungen graphisch durchgeführt werden können) nach (4.2)

$$\varphi_\nu(s) = \int G(s,t)\,p(t)\,\eta_\nu(t)\,dt \quad \text{(12.5)};$$

die η_ν brauchen nicht die Randbedingungen zu erfüllen. Dann wird aus (12.3)

$$\sum_{\nu=1}^{m} c_\nu \int p(s)\,\eta_\varrho(s)\,\{\eta_\nu(s) - \Lambda \int G(s,t)\,p(t)\,\eta_\nu(t)\,dt\}\,ds = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, m) \quad \text{(12.6)}.$$

Für einen eingliedrigen Ansatz $w = \varphi_1$ wird analog zu (10.5)

$$\Lambda = \frac{\int \frac{1}{p}(L[\varphi_1])^2\,ds}{-\int \varphi_1\,L[\varphi_1]\,ds} = \mu_1[\varphi_1] \quad \text{(12.7)}.$$

Denkt man sich φ_1 aus einer Funktion η_1 nach (12.4) hervorgegangen, und erfüllen η_1 und φ_1 die Randbedingungen, so sagt die Theorie der schrittweisen Näherungen aus, daß der Wert (12.7) zwischen den beiden Rayleighschen Werten $R[\eta_1]$ und $R[\varphi_1]$ liegt:

$$R[\eta_1] \geqq \mu_1[\varphi_1] \geqq R[\varphi_1] \geqq \lambda_1\,.$$

Das Entsprechende gilt auch für den ersten Eigenwert bei einem mehrgliedrigen Ansatz der Form (12.2). Betrachtet man nämlich die folgenden drei Funktionen F_0, F_1, F_2 der m Veränderlichen $c_1, c_2, \ldots, c_m$:

$$F_0(c_1,\ldots,c_m) = R\Big[\sum_{\nu=1}^{m} c_\nu\,\eta_\nu\Big], \qquad F_1(c_1,\ldots,c_m) = \mu_1\Big[\sum_{\nu=1}^{m} c_\nu\,\varphi_\nu\Big], \qquad F_2(c_1,\ldots,c_m) = R\Big[\sum_{\nu=1}^{m} c_\nu\,\varphi_\nu\Big],$$

und genügen die η_ν den Randbedingungen, so ist für jede Wahl der c_ν nach der Theorie der schrittweisen Näherungen

$$F_0 \geqq F_1 \geqq F_2\,.$$

Die F_0, F_1, F_2 sind nach unten beschränkt und diese Ungleichung gilt dann (vgl. das „zweite Prinzip" bei [C. 4] S. 353) auch für die Minima.

$$(F_0)_{\min} \geqq (F_1)_{\min} \geqq (F_2)_{\min}\,.$$

Nun ist $(F_0)_{\min}$, bzw. $(F_2)_{\min}$ der Ritzsche Näherungswert für λ_1, wenn man von den Funktionen η_ν, bzw. φ_ν ausgeht, und $(F_1)_{\min}$ der Grammelsche Näherungswert für λ_1; es liegt also der Grammelsche Näherungswert für λ_1 auch bei einem mehrgliedrigen Ansatz zwischen den entsprechenden Ritzschen Näherungswerten[5]). Setzt man nicht voraus, daß die η_ν den Randbedingungen genügen, so kann $(F_0)_{\min} < (F_1)_{\min}$, also $(F_0)_{\min}$ ein besserer Näherungswert als $(F_1)_{\min}$, und auch $(F_0)_{\min} < \lambda_1$ sein, aber $(F_1)_{\min} \geqq (F_2)_{\min}$ bleibt gültig.

Die Gl. (12.3) bzw. (12.6) von Grammel füllen folgende Lücke aus: Hat man für ein System von Funktionen $\eta_\nu(s)$ die Ritz-Galerkinschen Gleichungen aufgestellt, und sind die erhaltenen Näherungen für die Eigenwerte nicht genau genug, so kann man von den Ausgangsfunktionen η_ν durch einen Iterationsschritt (12.4) bzw. (12.5) zu genaueren Funktionen φ_ν gelangen. Erscheint einem dann die Durchführung des Ritzschen Verfahrens mit diesen genaueren Funktionen φ_ν zu zeitraubend, so hat man in den Grammelschen Gleichungen die Möglichkeit, mit geringerem Rechenaufwand (allerdings auch mit geringerer Endgenauigkeit als beim Rechnen nach Ritz mit den φ_ν) Näherungen aufzustellen, die im allgemeinen viel besser sind als die mit den η_ν nach Ritz berechneten Werte.

[5]) Es erscheint mir möglich, daß die gleiche Eigenschaft der Zwischenlage der Grammelschen Näherungen zwischen den entsprechenden Ritzschen Werten auch für die höheren Eigenwerte auf dem gleichen Wege bewiesen werden kann, wenn man die Courant-Hilbertschen Sätze [C. 4] S. 27/28 ausdehnt auf den Fall, daß an Stelle der dortigen Nebenbedingung $\sum_{\rho=1}^{n} x_\rho^2 = 1$ eine allgemeinere quadratische Bedingung tritt.

Ein anderer Beweis von Prof. H. Kneser in der Math. Zeitschr. ist bei [G. 3] S. 40 angekündigt.

13. Sämtliche Ritzschen Näherungswerte $L_\nu^{(m)}$ als obere Schranken für die entsprechenden Eigenwerte. Es ist $L_\nu^{(m)} \geq \lambda_\nu$ für $\nu = 1, 2, \ldots, m$. Daß dies für alle m Eigenwerte, nicht nur für den ersten gilt, zeigt folgende Überlegung (vgl. E. Trefftz [T. 3]). Wir denken uns die Funktionen $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$ durch weitere Funktionen $\psi_{m+1}, \psi_{m+2}, \ldots$, die von den ersten m Funktionen $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$ linear unabhängig sind, zu einem vollständigen Funktionensystem erweitert. Dann denken wir uns dem Ausgangsproblem nacheinander die Zwangsbedingungen

$$\int \psi_{m+1} \varphi \, ds = 0, \qquad \int \psi_{m+2} \varphi \, ds = 0 \ldots \quad (13.1)$$

auferlegt. Jedesmal, wenn eine dieser Zwangsbedingungen hinzukommt, ändert sich der Grundton und jeder Oberton nie anders als in steigendem Sinn (Courant-Hilbert [C. 4], S. 354, Satz 1). Die oben berechneten $L_1^{(m)}, \ldots L_m^{(m)}$ mit den dazugehörigen $\varphi_\mu^{(m)}$ sind nun die strenge Lösung des Variationsproblems, wenn alle Zwangsbedingungen (13.1) hinzugetreten sind, wenn also die Gesamtheit der zulässigen Vergleichsfunktionen nur aus den Funktionen (9.4) besteht. Es gilt also für jedes ν:

$$L_\nu^{(m)} \geq \lambda_\nu \quad (13.2).$$

Nimmt man nun noch die Zwangsbedingung

$$\int \psi_m \varphi \, ds = 0$$

hinzu, so können sich die Eigenwerte wieder nur in steigendem Sinn ändern, also

$$L_\nu^{(m-1)} \geq L_\nu^{(m)} \begin{cases} \text{für } m = 1, 2, \ldots \\ \text{und } \nu = 1, 2, \ldots, m-1 \end{cases} \quad (13.3).$$

Diese Tatsache kann man nach bekannten Sätzen der Algebra auch direkt der Determinante (9.7) ansehen[6]).

14. Untere Schranken nach der Methode von Trefftz-Willers. Bei der Durchführung des im folgenden beschriebenen Gedankengangs sucht man eine der beiden Größen Q_1 oder Q_2

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i}; \qquad Q_2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2} \quad (14.1)$$

zu berechnen (Konvergenz der Reihen vorausgesetzt) oder wenigstens in Schranken einzuschließen; hat man nach den Verfahren **9** bis **12** obere Schranken $L_1, L_2, \ldots, L_m$ für die ersten m Eigenwerte berechnet, so erhält man in

$$\left.\begin{aligned} l_i^{(1)} &= \frac{1}{Q_1 + \frac{1}{L_i} - \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{L_j}}, \quad l_i^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{Q_2 + \frac{1}{L_i^2} - \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{L_j^2}}} \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \\ l_{m+1}^{(1)} &= \frac{1}{Q_1 - \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{L_j}}, \quad l_{m+1}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{Q_2 - \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{L_j^2}}} \end{aligned}\right\} \quad (14.2)$$

untere Schranken für die $(m+1)$ ersten Eigenwerte (Trefftz [T. 3])

$$l_i^{(1)} \leq \lambda_i; \qquad l_i^{(2)} \leq \lambda_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m+1) \quad (14.3).$$

Man kann Q_1 und Q_2 in Zusammenhang mit der Greenschen Funktion bringen (vgl. **29**). So haben z. B. bei dem Eigenwertproblem $f'' + \lambda p f = 0$, $f(o) = f(a) = 0$ die Größen Q_1 und Q_2 nach Tafel IV in **29** die Werte

$$Q_1 = \int_0^a \frac{x(a-x)}{a} p(x) \, dx, \qquad Q_2 = \int_0^a 2\left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 p(x) \left[\int_0^x t^2 p(t) \, dt\right] dx \quad (14.4).$$

[6]) Der algebraische Beweisgang ist durchgeführt bei MacDonald [M. 2], allerdings fehlt ihm zum Schluß $L_\nu^{(m)} \geq \lambda_\nu$ der Nachweis der Konvergenz der $L_\nu^{(m)}$ für $m \to \infty$.

Jedoch wurde bereits in **2** darauf hingewiesen, daß schon bei etwas komplizierteren Eigenwertproblemen der Weg über die Greensche Funktion für die praktische Rechnung nicht mehr brauchbar ist. Eine große Klasse von Problemen (besonders die analytisch zugänglichen) läßt sich aber noch mit der folgenden Methode (Trefftz-Willers [T. 4]) behandeln. Es müssen dabei einige weitere Voraussetzungen erfüllt sein:

Es sei jetzt $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m, \ldots$ ein vollständiges Funktionensystem bei den vorgegebenen Randbedingungen, so daß man auf die Darstellbarkeit der Eigenfunktionen f_ν durch die ψ_μ und die Konvergenz der $L_\nu^{(m)} \to \lambda_\nu$ für wachsendes m schließen kann.

Ferner sei die Matrix $((a_{\varrho\nu}))$ eine Diagonalmatrix

$$a_{\varrho\nu} = -\int \psi_\varrho \, L[\psi_\nu] \, ds = 0 \quad \text{für} \quad \varrho \neq \nu .$$

Das Erfülltsein dieser Voraussetzung kann man oft erreichen, indem man die ψ_ν durch entsprechende lineare Kombinationen (wie beim E. Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren) ersetzt.

Dann vereinfacht sich (10.4) zu

$$c_\varrho = \Lambda \sum_{\nu=1}^{m} \frac{b_{\varrho\nu}}{a_{\varrho\varrho}} c_\nu \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, m),$$

und wenn man den Wert für c_ϱ rechts nochmals einsetzt:

$$c_\varrho = \Lambda^2 \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{\sigma=1}^{m} \frac{b_{\varrho\nu}\, b_{\nu\sigma}}{a_{\varrho\varrho}\, a_{\nu\nu}} c_\sigma \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, m) \quad \ldots\ldots \quad (14.5).$$

Die hierzu gehörige Determinante

$$\Delta_m^*(\Lambda) = \begin{vmatrix} \displaystyle\sum_{\nu=1}^{m} \frac{b_{1\nu}\, b_{\nu 1}}{a_{11}\, a_{\nu\nu}} - \frac{1}{\Lambda^2} & \displaystyle\sum_{\nu=1}^{m} \frac{b_{1\nu}\, b_{\nu 2}}{a_{11}\, a_{\nu\nu}} & \ldots \\ \displaystyle\sum_{\nu=1}^{m} \frac{b_{2\nu}\, b_{\nu 1}}{a_{22}\, a_{\nu\nu}} & \displaystyle\sum_{\nu=1}^{m} \frac{b_{2\nu}\, b_{\nu 2}}{a_{22}\, a_{\nu\nu}} - \frac{1}{\Lambda^2} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots \quad (14.6)$$

gleich Null gesetzt hat die Wurzeln

$$[L_1^{(m)}]^{-2}, \qquad [L_2^{(m)}]^{-2}, \ldots \qquad \ldots, \qquad [L_m^{(m)}]^{-2}.$$

Für ihre Summe σ_m gilt

$$\sigma_m = \sum_{\varrho=1}^{m} \frac{1}{[L_\varrho^{(m)}]^2} = \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{\varrho=1}^{m} \frac{b_{\varrho\nu}\, b_{\nu\varrho}}{a_{\varrho\varrho}\, a_{\nu\nu}} \qquad (m = 1, 2, \ldots) \quad \ldots\ldots \quad (14.7).$$

Hat das Eigenwertproblem nur positive Eigenwerte (auch im Falle, daß endlich viele negative Eigenwerte vorhanden sind, kann man die folgenden Betrachtungen durchführen), so bilden die Größen σ_m wegen (13.3) für wachsendes m eine monoton wachsende Folge, die wegen (13.2) beschränkt ist:

$$\sigma_m \leq \sum_{\varrho=1}^{m} \frac{1}{\lambda_\varrho^2} \leq Q_2 .$$

Die Konvergenz der σ_m ist somit gesichert und aus

$$\lim_{m \to \infty} L_\varrho^{(m)} = \lambda_\varrho \quad \text{folgt} \quad \lim_{m \to \infty} \sigma_m = Q_2 \;{}^{7)} .$$

[7] Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein N mit $\sum_{\varrho=1}^{N} \lambda_\varrho^{-2} > Q_2 - \frac{\varepsilon}{2}$ und ein $M > N$ mit $\lambda_\varrho^{-2} - [L_\varrho^{(M)}]^{-2} < \frac{\varepsilon}{2N}$ für $\varrho = 1, 2, \ldots, N$. Dann ist $\sigma_M \geq \sum_{\varrho=1}^{N} [L_\varrho^{(M)}]^{-2} > Q_2 - \varepsilon$.

Dann gilt

$$Q_2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\varrho=1}^{\infty} \frac{b_{\varrho\nu} b_{\nu\varrho}}{a_{\varrho\varrho} a_{\nu\nu}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (14.8).$$

In vielen Fällen gelingt es, die rechtsstehende Summe auszurechnen oder wenigstens abzuschätzen (in dem Beispiel von Trefftz-Willers mit Hilfe von Integralen). Dann liefert (14.2) die gesuchten unteren Schranken.

3. Abschnitt:

Die Einschließungssätze von Temple und Weinstein.

15. Der Templesche Einschließungssatz für den ersten Eigenwert. Dieser Satz gilt für Eigenwertprobleme bei

$$L[\varphi] + \lambda p \varphi = 0,$$

bei denen L und die Randbedingungen die in **4** genannten Voraussetzungen erfüllen und bei denen man für die ganze Problemklasse (d. h. für beliebige stetige, positive Funktionen p) weiß, daß die zum ersten Eigenwert λ_1 gehörige Eigenfunktion f_1 und auch nur diese Eigenfunktion im Innern des Grundgebietes nirgends verschwindet, also etwa als positiv angenommen werden kann. Dann lautet der Templesche Einschließungssatz: Ist w eine den Randbedingungen genügende, im Innern des Grundgebietes nirgends verschwindende (genügend oft differentiierbare, d. h. so, daß man $L[w]$ bilden kann), aber sonst willkürliche Funktion, so gilt, falls der linksstehende Ausdruck positiv ist:

$$\left(\frac{-L[w]}{p\,w}\right)_{\min} \leq \lambda_1 \leq \left(\frac{-L[w]}{p\,w}\right)_{\max} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (15.1).$$

Einige Bemerkungen zur Literatur: Dieser allgemeine Templesche Einschließungssatz tritt in der Literatur an verschiedenen Stellen bei speziellen Fällen auf und zwar oft in verkleideter Form, der man den Zusammenhang mit dem Templeschen Satz nicht unmittelbar ansieht, z. B. gibt Kiessling ([K. 2] S. 597, Gl. (18)) bei der Differentialgleichung (die Bezeichnungen sind gegenüber Kiessling leicht geändert)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{q}\frac{dy}{dx}\right) + \lambda p y = 0$$

die Schranken an

$$\left(\frac{-\frac{dz}{dx}}{p(x)\int\limits_0^x z(s)\,q(s)\,ds}\right)_{\min} \leq \lambda_1 \leq \left(\frac{-\frac{dz}{dx}}{p(x)\int\limits_0^x z(s)\,q(s)\,ds}\right)_{\max},$$

wo $z(x)$ eine willkürliche, nur gewissen Rand- und Stetigkeitsbedingungen genügende, monotone Funktion ist. Dieser Spezialfall ordnet sich dem allgemeinen Satz unter, wenn man $z(x) = \frac{1}{q(x)}\frac{dw}{dx}$ setzt. Ferner ist der Satz für gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung bei Hohenemser [H. 3] S. 35 erwähnt. Im Spezialfall der gewöhnlichen Differentialgleichung vierter Ordnung findet sich der Satz (ebenso wie bei Kiessling in verkleideter Form) bei H. Schaefer [S. 1] S. 12. Für gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter und vierter Ordnung hat J. Barta [B. 1] mit Hilfe formaler Umformungen einen neuen direkten Beweis geliefert. Einen weiteren Beweis (mit Verwendung der Greenschen Funktion) für gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung hat A. Schleusner [S. 2] S. 43 bis 45 gegeben. Temple [T. 1] selbst beweist den Satz für selbstadjungierte gewöhnliche Differentialgleichungen $2n$-ter Ordnung und nennt ihn den „Morrowschen Satz", aber in den bei Temple angeführten Arbeiten von Morrow [M. 4] ist nur die bereits in **3** genannte Methode angewendet. Es ist bemerkenswert, daß ein Spezialfall des Templeschen Einschließungssatzes sich bereits in einer Arbeit von H. A. Schwarz aus dem Jahre 1885 findet. Schwarz betrachtet [S. 5] S. 252 die Differentialgleichung $\left(\text{er hat einige andere Bezeichnungen, z. B. } \frac{1}{c} = \lambda\right)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \lambda \cdot p(x, y) f = 0.$$

Er bezeichnet mit g den größten Wert, den die Funktion w annimmt, die der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + p = 0$ und den Randbedingungen genügt; dann beweist er $g \geqq \frac{1}{\lambda_1}$. Da mit der Bezeichnung Φ von (16.1) $\Phi_{\min} = \left(\frac{-L[w]}{p\,w}\right)_{\min} = \frac{1}{w_{\max}} = \frac{1}{g}$ ist, hat er für λ_1 die im Templeschen Satz angegebene untere Schranke bewiesen.

Der Beweis des Templeschen Einschließungssatzes benutzt den bekannten **Hilfssatz:** Die Randwertprobleme

$$L[\varphi] + \lambda\, p\, \varphi = 0 \quad \text{bzw.} \quad L[\varphi] + \varrho\, q\, \varphi = 0$$

mögen bei denselben Randbedingungen die zu den ersten Eigenwerten λ_1 bzw. ϱ_1 gehörigen Eigenfunktionen f_1 bzw. g_1 besitzen. Ist dann $p \geqq q > 0$ im ganzen Grundgebiet, so ist $\lambda_1 \leqq \varrho_1$; das folgt sofort nach (6.6) mit $w = g_1$

$$\varrho_1 = \frac{-L[g_1]}{q\, g_1} = \frac{-g_1\, L[g_1]}{q\, g_1^2} = \frac{-\int g_1\, L[g_1]\, d s}{\int q\, g_1^2\, d s} \geqq \frac{-\int g_1\, L[g_1]\, d s}{\int p\, g_1^2\, d s} \geqq \lambda_1 .$$

Führt man die Hilfsfunktionen

$$\Phi(s) = \frac{-L[w]}{p\, w} \quad \text{. . . . .} \quad (15.2)$$

ein und gilt

$$0 < \Phi_{\min} \leqq \Phi(s) \leqq \Phi_{\max},$$

($\Phi_{\max}$ darf ∞ sein), so ist auf die drei Gleichungen

$$L[\varphi] + \lambda \frac{-L[w]}{w \cdot \Phi_{\min}} \cdot \varphi = 0, \qquad L[\varphi] + \lambda\, p \cdot \varphi = 0, \qquad L[\varphi] + \lambda \frac{-L[w]}{w \cdot \Phi_{\max}} \cdot \varphi = 0,$$

wegen

$$\frac{-L[w]}{w \cdot \Phi_{\min}} \geqq p \geqq \frac{-L[w]}{w\, \Phi_{\max}}$$

der Hilfssatz anwendbar. Die erste bzw. dritte Gleichung haben als kleinsten Eigenwert $\Phi_{\min}$, bzw. $\Phi_{\max}$ mit derselben Eigenfunktion w; denn nach der oben gemachten Voraussetzung, daß für die erste Eigenfunktion das Nichtverschwinden im Grundintervall charakteristisch ist, können wir schließen, daß w die erste Eigenfunktion ist. Der Hilfssatz liefert also die Behauptung

$$\Phi_{\min} \leqq \lambda_1 \leqq \Phi_{\max} .$$

Setzt man in (15.1) eine Funktion w ein, die nicht sämtliche Randbedingungen erfüllt, so können die Ungleichungen falsch sein[8]). Die in (15.1) einzusetzende Funktion w muß, wenn die Schranken nicht allzu grob ausfallen sollen, den Verlauf der ersten Eigenfunktion gut wiedergeben. Zur Steigerung der Genauigkeit stehen zwei Wege zur Verfügung.

1. Man verbessert die Funktion w ein oder mehrere Male nach dem Verfahren der schrittweisen Näherungen (s. 4) und setzt die verbesserte Funktion in (15.1) ein.

2. Kiessling [K.2] empfiehlt, da die in (15.1) einzusetzende Funktion w noch in weitem Maße willkürlich ist, w von einem Parameter k abhängen zu lassen und durch Versuche die günstigsten Werte von k zu ermitteln, also etwa

$$\left(\frac{-L[w(k)]}{p\, w(k)}\right)_{\min} \quad \text{und} \quad \left(\frac{-L[w(k)]}{p\, w(k)}\right)_{\max}$$

als Funktionen von k graphisch aufzutragen. Dann ist

$$\text{Max nach } k \text{ von} \left(\frac{-L[w(k)]}{p\, w(k)}\right)_{\min} \leqq \lambda_1 \leqq \text{Min nach } k \text{ von} \left(\frac{-L[w(k)]}{p\, w(k)}\right)_{\max} \quad . \; . \; . \quad (15.3).$$

Man muß hierbei den Bereich feststellen, den k durchlaufen darf, ohne daß das zugehörige $w(k)$ eine der gestellten Bedingungen verletzt.

[8]) Z. B. wenn man als w die erste Eigenfunktion f_1^* einsetzt von

$$\begin{cases} L[\varphi] + \lambda^*\, p\, \varphi = 0 \\ \text{eine Randbedingung gegenüber dem Ausgangsproblem geändert.} \end{cases}$$

Dann ist

$$\Phi_{\min} = \Phi_{\max} = \lambda_1^* \neq \lambda_1 .$$

16. Der dem Templeschen Einschließungssatz entsprechende Satz für die höheren Eigenwerte. Man läßt jetzt die Voraussetzung fallen, daß die in (15.1) vorkommende Funktion w im Innern des Grundgebietes nirgends verschwindet; dann gilt natürlich nicht mehr, daß zwischen den in (15.1) angegebenen Grenzen der erste Eigenwert eingeschlossen ist, aber es ist immer noch wenigstens ein Eigenwert λ_j (evtl. irgendein höherer) eingeschlossen.

$$0 < \left(\frac{-L[w]}{p\,w}\right)_{\min} \leq \lambda_j \leq \left(\frac{-L\,w}{p\,w}\right)_{\max} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16.1).$$

Der Einschließungssatz gilt in derselben Allgemeinheit, d. h. für alle die Differentialgleichungsprobleme, für die der folgende Courant-Hilbertsche Satz ([C. 4] S. 357, Satz 7) gilt, der beim Beweise gebraucht wird (der Satz gilt nicht nur für die spezielle Gl. [C. 4] S. 345, Gl. (1), sondern wie dort S. 348 betont wird, auch für andere Eigenwertprobleme, z. B. auch für alle in diesem Aufsatz (4.3) bis (4.6) aufgeführten Probleme): „Wenn in der Differentialgleichung $L[\varphi] + \lambda\,p\,\varphi = 0$ der Koeffizient p an jeder Stelle in demselben Sinne verändert wird, so ändert sich (bei jeder Randbedingung) der n-te Eigenwert im entgegengesetzten Sinne."

Es sei nun w eine den Randbedingungen genügende Funktion, für die das nach (15.2) gebildete Φ zwischen endlichen positiven Grenzen liegt. Wegen $L[w] + \Phi\,p\,w = 0$ ist w eine Eigenfunktion des Problems

$$L[\varphi] + \lambda^* \Phi \cdot p\,\varphi = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16.2)$$

(stets bei denselben Randbedingungen); w sei etwa die m-te Eigenfunktion und gehört zum Eigenwert $\lambda^*_m = 1$. Nach dem eben angeführten Hilfssatz hat dann das Problem

$$L[\varphi] + \lambda'\,\Phi_{\min} \cdot p\,\varphi = 0$$

wegen Verkleinerung des Koeffizienten $\Phi \cdot p$ einen m-ten Eigenwert, der nur gewachsen sein kann: $\lambda'_m \geq 1$. Da $\Phi_{\min}$ eine Konstante ist, ist dieses Problem aber dasselbe wie das zu lösende Problem (1.2), d. h.

$$\lambda'_m = \frac{\lambda_m}{\Phi_{\min}}, \qquad \text{also} \quad \lambda_m \geq \Phi_{\min}.$$

Genau so schließt man auf

$$\lambda_m \leq \Phi_{\max}.$$

Oft (z. B. bei gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung) kann man aus der Anzahl der Nullstellen, die w im Innern des Grundintervalls annimmt, schließen, die wievielte Eigenfunktion des Problems (16.2) w ist. Dann weiß man auch, welcher Eigenwert nicht außerhalb der in (16.1) angegebenen Schranken liegen kann.

17. Formulierung des Weinsteinschen Einschließungssatzes. Der Weinsteinsche Einschließungssatz gilt bei Eigenwertproblemen

$$L[\varphi] + \lambda\,p\,\varphi = 0,$$

die die in **4** genannten Voraussetzungen erfüllen und ist bisher nur unter Heranziehung des Entwicklungssatzes bewiesen worden. Es sei w eine den Randbedingungen genügende, aber sonst willkürliche Funktion. Ferner sei w nach den Eigenfunktionen f_n in eine absolut und im Grundgebiet gleichmäßig konvergente Reihe entwickelbar und es wird gebraucht, daß man die in (18.1) und (18.4) erforderlichen Operationen gliedweise vornehmen darf, d. h. es wird vorausgesetzt, daß das rein formale Rechnen (gliedweises Differentiieren, Ausmultiplizieren der Reihen usw.) erlaubt ist. Da dies in vielen Fällen schwer nachprüfbar ist, ist schon aus diesem Grunde ein anderer Beweis des Weinsteinschen Satzes erwünscht, der nicht den Entwicklungssatz, sondern nur die hier in den Abschnitten 1 und 2 verwendeten Hilfsmittel benutzt. Man bildet nun die beiden Ausdrücke

$$R = \frac{-\int w\,L[w]\,d\,s}{\int p\,w^2\,d\,s} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17.1),$$

$$\mu^2 = \frac{\int \frac{1}{p}\,(L[w])^2\,d\,s}{\int p\,w^2\,d\,s} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17.2).$$

R ist dabei der bekannte nach dem Rayleighschen Prinzip (6.6) berechnete Näherungswert für λ_1 und μ (μ sei die nichtnegative Wurzel aus den Quotienten (17.2)) ist identisch mit dem von Trefftz [T. 3] im Spezialfall $p = 1$ angeführten, auch mit μ bezeichneten Ausdruck.

Bei Weinstein [W. 1] und Erdelyi [E. 1] werden die Größen R und μ^2 mit J_1 bzw. J_2 bezeichnet. Sie ordnen sich der Theorie der schrittweisen Näherungen in **4** unter, wenn man $w = F_1$, also nach (4.8) $L[w] = -p F_0$ setzt. Dann ist

$$R = \mu_2 \quad \text{und} \quad \mu = \sqrt{\mu_1 \mu_2}.$$

Die Theorie der schrittweisen Näherungen ergab nach (6.3) $\mu_1 \geqq \mu_2$, man hat also sofort $\mu \geqq R$.

Dann lautet der Weinsteinsche Einschließungssatz: Zwischen den beiden Zahlen

$$R - \sqrt{\mu^2 - R^2} \quad \text{und} \quad R + \sqrt{\mu^2 - R^2}$$

liegt mindestens ein Eigenwert λ_j des betrachteten Eigenwertproblems.

18. Beweis des Weinsteinschen Einschließungssatzes. Zum Beweise wird w in der Gestalt angesetzt

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n, \quad \text{also} \quad -L[w] = p \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n f_n \quad \text{(18.1)}.$$

Von den f_n kann man Normierung voraussetzen

$$\int p f_i f_k \, d s = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k \\ 1 & \text{für } i = k \end{cases} \quad \text{(18.2)}.$$

Dann wird der folgende Ausdruck (der offenbar nur verschwindet, wenn für w eine Eigenfunktion eingesetzt wird) auf zwei verschiedene Arten ausgerechnet: Einerseits ist

$$\left.\begin{aligned} \frac{\int \frac{1}{p} (L[w] + R p w)^2 \, d s}{\int p w^2 \, d s} &= \frac{\int \left\{ \frac{1}{p} (L[w])^2 + 2 R L[w] w + R^2 p w^2 \right\} d s}{\int p w^2 \, d s} \\ &= \mu^2 - 2 R^2 + R^2 = \mu^2 - R^2 \end{aligned}\right\} \quad \text{(18.3)}.$$

Andererseits ist

$$\frac{\int \frac{1}{p} (L[w] + R p w)^2 \, d s}{\int p w^2 \, d s} = \frac{\int p \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n (-\lambda_n + R) f_n \right\}^2 d s}{\int p \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n \right\}^2 d s} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 (R - \lambda_n)^2}{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2} \quad \text{(18.4)}.$$

Ist nun λ_j der R am nächsten gelegene Eigenwert (oder einer von den beiden möglicherweise von R gleichweit entfernten Eigenwerten), so ist für alle n

$$(R - \lambda_n)^2 \geqq (R - \lambda_j)^2,$$

der Quotient der beiden Summen ist also mindestens gleich $(R - \lambda_j)^2$ und es folgt

$$\mu^2 - R^2 \geqq (R - \lambda_j)^2 = |R - \lambda_j|^2,$$

also

$$R - \sqrt{\mu^2 - R^2} \leqq \lambda_j \leqq R + \sqrt{\mu^2 - R^2} \quad \text{(18.5)}.$$

Welcher Eigenwert von den beiden hier angegebenen Schranken eingeschlossen wird, kann im allgemeinen nicht von vornherein entschieden werden. Sind jedoch, etwa nach dem Ritzschen Verfahren, obere Schranken und ungefähre Bereiche für mehrere Eigenwerte bekannt, so wird man meist auch sagen können, welche Eigenwerte zwischen den Schranken (18.5) in Betracht kommen. Weiß man z. B., daß R näher an λ_1 als an λ_2 liegt, so liefert (18.5) eine untere Schranke für λ_1.

Die Schranken (18.5) sind nur dann brauchbar, wenn w die Eigenfunktion gut annähert. Viele Beispiele zeigen, daß dieselben Näherungsfunktionen, die beim Ritzschen Verfahren für die Eigenwerte gute Näherungen liefern, bei Einsetzen in (18.5) ganz grobe, unbrauchbare Schranken liefern können. Zur Verbesserung der Schranken stehen wieder die in **16** genannten Methoden 1, 2 zur Verfügung. Gelingt es aber, den Verlauf der Eigenfunktionen gut zu schätzen, so können auch die Schranken für die höheren Eigenwerte brauchbar ausfallen. So zeigt z. B. Erdélyi [E. 1] bei dem Eigenwertproblem

$$f'' + \lambda p(x) f = 0, \qquad f(0) = f(1) = 0,$$

daß man bei Einsetzen der bekannten asymptotischen Entwicklung der Eigenfunktionen (Courant-Hilbert [C. 4] 1931, S. 291, Gl. (67))

$$w_n = p^{-\frac{1}{4}} \sin\left(\frac{n \pi}{P} \int_0^x p(u) \, d u\right)$$

mit $P=\int_0^1 p(u)\,d\,u$ in (18.5) die asymptotische Darstellung der Eigenwerte erhält:

$$\left|\frac{n^2\pi^2}{Q^2}+D_n-\lambda_n\right|\leq S_n,$$

wobei D_n und S_n beschränkte, aus w_n, p und seinen Ableitungen berechenbare Ausdrücke sind.

19. Untere Schranke für den ersten Eigenwert nach Trefftz-Newing. Die Umformung, die zu (18.3) führt, zeigt, daß μ^2-R^2 eine nichtnegative Größe, daß also $\mu\geq R$ ist, was auch unmittelbar aus der Theorie der schrittweisen Näherungen folgte (vgl. **17**). Da nun nach **5** der Rayleighsche Wert R stets mindestens gleich dem kleinsten Eigenwert λ_1 ist, folgt $\mu\geq R\geq\lambda_1$. In **7** war die Methode von Temple besprochen, die den Unterschied $R-\lambda_1$ abschätzte. Hier soll die Trefftz-Newingsche Methode besprochen werden, die den Unterschied $\mu-\lambda_1$ abschätzt[9]. Hierbei sei λ_1 ein einfacher Eigenwert.

Es wird die Funktion (die ähnlich wie die in (5.1) eingeführte Funktion gebildet ist)

$$\psi(s)=\frac{1}{\mu}L[w]+p\,w \qquad (19.1)$$

betrachtet; bezeichnet wieder f_1 die erste Eigenfunktion, so berechnet sich der erste Fourierkoeffizient a_1 von w nach (18.1) (18.2) zu

$$a_1=\int p\,w\,f_1\,d\,s$$

und es wird

$$\left.\begin{aligned}\int\psi f_1\,d\,s&=\frac{1}{\mu}\int L[w]f_1\,d\,s+\int p\,w\,f_1\,d\,s\\&=\frac{-1}{\mu}\int p\sum_{n=1}^{\infty}a_n\lambda_n f_n f_1\,d\,s+a_1=a_1-\frac{a_1\lambda_1}{\mu}=a_1\frac{\mu-\lambda_1}{\mu}\end{aligned}\right\} \qquad (19.2).$$

Zur Abschätzung von $\mu-\lambda_1$ hat man also a_1 und $\int\psi f_1\,d\,s$ abzuschätzen. Führt man noch ein

$$A=\sqrt{\int p\,w^2\,d\,s}=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2},\qquad \varepsilon(s)=f_1(s)-\frac{w(s)}{A} \qquad (19.3),$$

so ist

$$\left.\begin{aligned}\int p\,\varepsilon^2\,d\,s&=1-\frac{2}{A}a_1+1=2\left(1-\frac{a_1}{A}\right)\\\int\psi f_1\,d\,s&=\int\psi\left(\varepsilon+\frac{w}{A}\right)d\,s=\int\psi\,\varepsilon\,d\,s+\frac{1}{A}\left(-\frac{R\,A^2}{\mu}+A^2\right)=\int\psi\,\varepsilon\,d\,s+A\,g\end{aligned}\right\} \qquad (19.4),$$

wobei (17.1) benutzt und gesetzt ist $g=1-\dfrac{R}{\mu}$.

Dann ist nach (17.2) und (19.3)

$$\int\frac{1}{p}\psi^2\,d\,s=\frac{1}{\mu^2}\cdot\mu^2A^2-\frac{2}{\mu}R\,A^2+A^2=2\,g\,A^2$$

und nach der Schwarzschen Ungleichung

$$\left|\int\psi\,\varepsilon\,d\,s\right|=\left|\int\frac{\psi}{\sqrt{p}}\cdot\varepsilon\sqrt{p}\,d\,s\right|\leq\sqrt{\int\frac{\psi^2}{p}d\,s\int p\,\varepsilon^2\,d\,s}=2\,A\sqrt{g}\sqrt{1-\frac{a_1}{A}},$$

also nach (19.4)

$$\int\psi\,f_1\,d\,s\leq A\left[g+2\sqrt{g}\sqrt{1-\frac{a_1}{A}}\right] \qquad (19.5).$$

Nun ist noch $\dfrac{a_1}{A}$ abzuschätzen, und zwar nach unten. (Wir denken uns das Vorzeichen von f_1 so gewählt, daß $a_1\geq 0$ ist.) Es ist

$$\lambda_2-R=\lambda_2-\frac{\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\lambda_n}{\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2}=\frac{a_1^2(\lambda_2-\lambda_1)-\sum_{n=3}^{\infty}a_n^2(\lambda_n-\lambda_2)}{A^2}\leq\frac{a_1^2(\lambda_2-\lambda_1)}{A^2}.$$

[9]) Newing [N. 2] betrachtet mit Rücksicht auf Anwendung in der Quantenmechanik auch Probleme, bei denen endlich oder unendlich viele negative oder sogar kontinuierlich verteilte Eigenwerte auftreten.

also[10]) wenn man mit l_1, l_2 untere Schranken für die ersten beiden Eigenwerte λ_1, λ_2 bezeichnet,

$$\frac{a_1}{A} \geqq \sqrt{\frac{\lambda_2 - R}{\lambda_2 - \lambda_1}} = \sqrt{1 - \frac{R - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}} \geqq \sqrt{1 - \frac{R - \lambda_1}{l_2 - \lambda_1}} = \sqrt{\frac{l_2 - R}{l_2 - \lambda_1}} \geqq \sqrt{\frac{l_2 - R}{l_2 - l_1}} \quad . \quad . \quad . \quad (19.6).$$

(19.2), (19.5) und (19.6) zusammen ergeben

$$\frac{\mu - \lambda_1}{\mu} \leqq \sqrt{\frac{l_2 - l_1}{l_2 - R}} \left\{ g + 2\sqrt{g} \sqrt{1 - \sqrt{\frac{l_2 - R}{l_2 - l_1}}} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19.8).$$

Setzt man hier für $l_1 = l_1^{(1)}$ eine grobe untere Schranke ein, so kann man mittels dieser Abschätzung für $\mu - \lambda_1$ diese untere Schranke verbessern und den verbesserten Wert $l_1^{(2)}$ von neuem als l_1 einsetzen. Man erhält so eine Folge von unteren Schranken $l_1^{(1)}, l_1^{(2)}, l_1^{(3)}, \ldots$

$$l_1^{(\nu+1)} = \mu - \mu \cdot \sqrt{\frac{l_2 - l_1^{(\nu)}}{l_2 - R}} \left\{ g + 2\sqrt{g} \sqrt{1 - \sqrt{\frac{l_2 - R}{l_2 - l_1^{(\nu)}}}} \right\} \quad (\nu = 1, 2, \ldots) \quad . \quad . \quad . \quad (19.9).$$

Meist werden sich nach ein paar Schritten die $l_1^{(\nu)}$ nicht mehr merklich ändern.

20. Der Rechnungsgang nach Trefftz-Newing ist also:

1. Man wählt eine den Randbedingungen genügende, den erwarteten Verlauf der ersten Eigenfunktion ungefähr wiedergebende Näherungsfunktion w und bildet nach (17.1) und (17.2) die Größen R und μ und $g = 1 - \frac{R}{\mu}$. Es ist $\mu \geqq R \geqq \lambda_1$.

2. Man verschafft sich grobe untere Schranken $l_1 = l_1^{(1)}$, l_2 für die ersten beiden Eigenwerte λ_1, λ_2; l_2 muß jedoch so gut gewählt sein, daß $l_2 - R$ positiv bleibt.

3. Man verbessert die untere Schranke $l_1^{(1)}$, indem man einige weitere $l_1^{(\nu)}$ nach (19.9) berechnet. Es ist dann stets

$$l_1^{(\nu)} \leqq \lambda_1 \leqq R.$$

4. Abschnitt:

Das Differenzenverfahren in erster und höherer Annäherung.

Das Differenzenverfahren ist ein ganz allgemeines, bei beliebigen linearen Differentialgleichungsproblemen anwendbares Verfahren.

Bei partiellen Differentialgleichungen gibt es bei gewissen Bereichen Probleme, bei denen allein das Differenzenverfahren bei erträglichem Rechenaufwand zu brauchbaren Näherungswerten führt, und die sonst der mathematischen Behandlung kaum zugänglich erscheinen.

21. Das Differenzenverfahren erster Annäherung für gewöhnliche Differentialgleichungen. Es seien etwa an zwei Stellen $x = a$ und $x = b$ Randbedingungen vorgeschrieben; dann teilt man das Intervall (a, b) in n gleiche Teile der Länge

$$h = \frac{b - a}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21.1).$$

Bezeichnet man die Werte der ersten Eigenfunktion $f(x)$ (der noch freie konstante Faktor kann durch irgendeine Normierungsbedingung festgelegt werden) an den Teilungspunkten

$$x_i = a + i\,h \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21.2)$$

mit $f(x_i) = f_i$, so werden nach dem Differenzenverfahren Näherungswerte F_i für die f_i berechnet. Hierzu stellt man für die unbekannten F_i lineare Gleichungen auf, indem man die vorgelegte Differentialgleichung (1.1) an einer Teilungsabszisse x_i betrachtet und ihr eine „finite Gleichung" gegenüberstellt. In der Differentialgleichung werden sämtliche Differentialquotienten durch Differenzenquotienten oder in der Ausdrucksweise der folgenden Abschnitte durch sog. „finite Ausdrücke erster Annäherung" ersetzt. (Ein „finiter Ausdruck" ist eine Linearkombination von Funktionswerten an der Stelle x_i und an einigen Nachbarstellen.)

---

[10]) Für $\frac{a_1}{A}$ hat Trefftz [T. 3] die Abschätzung

$$\frac{a_1}{A} > \sqrt{\frac{l_2^2 - \mu^2}{l_2^2 - l_1^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19.7)$$

erhalten. Sie wird im allgemeinen etwas schärfer sein als die Newingsche Abschätzung (19.6); da die Abschätzung aber im wesentlichen nicht das endgültige Resultat, sondern nur den oben beschriebenen Iterationsprozeß beeinflußt, ist oben die Formel (19.6) der Formel (19.7) wegen der Rechenersparnis vorgezogen worden. Zudem braucht in (19.6) l_2 nur größer zu sein als R, während zur Anwendung von (19.7) $l_2 > \mu$ nötig ist.

Tafel I: Finite Ausdrücke erster Annäherung mit Restglied.

$$\left(\frac{d\,g}{d\,x}\right)_{x=x_i} = \frac{g(x_{i+1}) - g(x_{i-1})}{2\,h} + \frac{1}{6}\,h^2\,m_3$$

$$\left(\frac{d^2 g}{d\,x^2}\right)_{x=x_i} = \frac{g(x_{i+1}) - 2\,g(x_i) + g(x_{i-1})}{h^2} + \frac{1}{12}\,h^2\,m_4$$

$$\left(\frac{d}{d\,x}\left(p(x)\frac{d\,g}{d\,x}\right)\right)_{x=x_i} = \frac{p\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)[g(x_{i+1}) - g(x_i)] - p\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)[g(x_i) - g(x_{i-1})]}{h^2} + h^2\,C$$

$$\left(\frac{d^3 g}{d\,x^3}\right)_{x=x_i} = \frac{g(x_{i+2}) - 2\,g(x_{i+1}) + 2\,g(x_{i-1}) - g(x_{i-2})}{2\,h^3} + \frac{17}{60}\,h^2\,m_5$$

$$\left(\frac{d^4 g}{d\,x^4}\right)_{x=x_i} = \frac{g(x_{i+2}) - 4\,g(x_{i+1}) + 6\,g(x_i) - 4\,g(x_{i-1}) + g(x_{i-2})}{h^4} + \frac{17}{90}\,h^2\,m_6$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\left(p(x)\frac{d^2 g}{d\,x^2}\right)\right)_{x=x_i} &= \frac{1}{h^4}\{g(x_{i+2})\,p(x_{i+1}) - 2\,g(x_{i+1})\,[p(x_i) + p(x_{i+1})] \\ &+ g(x_i)\,[p(x_{i+1}) + 4\,p(x_i) + p(x_{i-1})] - 2\,g(x_{i-1})\,[p(x_i) + p(x_{i-1})] \\ &+ g(x_{i-2})\,p(x_{i-1})\} + h^2\,C\end{aligned}$$

$$\left(\frac{d^5 g}{d\,x^5}\right)_{x=x_i} = \frac{g(x_{i+3}) - 4\,g(x_{i+2}) + 5\,g(x_{i+1}) - 5\,g(x_{i-1}) + 4\,g(x_{i-2}) - g(x_{i-3})}{2\,h^5} + \frac{169}{315}\,h^2\,m_7$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^6 g}{d\,x^6}\right)_{x=x_i} &= \frac{g(x_{i+3}) - 6\,g(x_{i+2}) + 15\,g(x_{i+1}) - 20\,g(x_i) + 15\,g(x_{i-1}) - 6\,g(x_{i-2}) + g(x_{i-3})}{h^6} \\ &+ \frac{169}{420}\,h^2\,m_8\end{aligned}$$

Dabei bedeutet m_ϱ eine Zahl, die ihrem Betrage nach den Maximalbetrag der ϱ-ten Ableitung von $g(x)$ in einem alle vorkommenden Teilungspunkte enthaltenden Intervall nicht übersteigt. In die Größe C gehen in leicht ausrechenbarer Weise auch noch die Beträge von p und seinen Ableitungen ein.

Setzt man in die vorgelegte Differentialgleichung für die Ableitungen die hier angegebenen Ausdrücke unter Fortlassung der Restglieder ein und schreibt dann an Stelle von $g(x_i)$ die Näherung F_i und an Stelle von λ die Näherung Λ, so erhält man eine „finite Gleichung", d. h. eine lineare Beziehung zwischen mehreren benachbarten F_i-Werten.

Für jeden inneren Punkt ($i = 1, 2, \ldots, n-1$) wird eine finite Gleichung angeschrieben. Auch die Randbedingungen werden durch finite Gleichungen ersetzt. Der Randbedingung $f = 0$ entspricht $F = 0$. Treten in den Randbedingungen Ableitungen auf, so werden diese genau wie die Differentialgleichung durch finite Ausdrücke ersetzt, z. B. $f'(b) = 0$ entspricht $F_{n+1} - F_{n-1} = 0$. In solchen Fällen, in denen F-Werte an über das Intervall (a, b) hinausragenden Stellen auftreten, kann es notwendig werden, die der Differentialgleichung entsprechende finite Gleichung auch noch für $i = 0$ oder $i = n$ aufzuschreiben; es ist jedenfalls stets möglich, ein Gleichungssystem von genau so viel Gleichungen aufzustellen, wie unbekannte F-Werte auftreten. Das so erhaltene lineare homogene Gleichungssystem für die F_i hat nur eine von identisch Null verschiedene Lösung, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet; diese ist ein Polynom in Λ; die Nullsetzung liefert eine algebraische Gleichung für Λ, deren Nullstellen zu bestimmen sind und der Größe nach mit

$$\Lambda_1^{(n)},\ \Lambda_2^{(n)},\ \ldots$$

bezeichnet werden. $\Lambda_\varrho^{(n)}$ dient dann als Näherung für den ϱ-ten Eigenwert.

Braucht man genauere Näherungswerte, so kann man

1. das Verfahren erster Annäherung mit kleinerer Maschenweite h wiederholen oder
2. ein Verfahren höherer Annäherung anwenden.

Hat man das Verfahren mit mehreren verschiedenen Maschenweiten h durchgerechnet, so kann man (wegen der oft langsamen Konvergenz beim Verfahren erster Annäherung) eine Ausgleichung vornehmen, indem man ansetzt

$$\Lambda_\varrho^{(n)} \approx \lambda_\varrho - \frac{C}{n^a},$$

mit C und a als Konstanten. Man schätzt nun den Wert von λ_ϱ und trägt in einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit logarithmischer Teilung auf beiden Achsen die Punkte n, $\lambda_\varrho - \Lambda_\varrho^{(n)}$ ein. Bei richtiger Schätzung von λ_ϱ müssen die (für mehrere Werte von n erhaltenen) Punkte annähernd auf einer Geraden liegen (vgl. den Vorschlag von Rosemann bei Burchard [B. 5] S. 342).

Andere Deutung (vgl. Willers [W. 2] S. 107/108): Löst man nach dem hier beschriebenen Verfahren z. B. das Problem: $f'' + \lambda p f = 0$, $f(0) = 0$, und ist eine zweite Randbedingung bei $x = a$ gegeben, so kann man vermöge der Differenzengleichungen, von $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$ (ein willkürlicher Faktor ist ja frei) ausgehend, nacheinander $F_2, F_3, \ldots, F_n$ ausrechnen, d. h. durch Λ ausdrücken. Man löst dabei auf primitive Weise das Anfangswertproblem $f'' = -\lambda p f$, $f(0) = 0$, $f'(0)$ vorgegeben, und bekommt nachher eine Gleichung für Näherungswerte Λ, für die die bei $x = a$ vorgegebene andere Randbedingung erfüllt ist. Dieser Gedanke, das Eigenwertproblem auf ein Anfangswertproblem zurückzuführen, die Näherungsfunktion in Abhängigkeit von Λ auszurechnen und in der zweiten Randbedingung eine Bedingungsgleichung für die Näherungswerte Λ zu erhalten, wurde ausgebaut in der Arbeit von Blaess [B. 3], bei der die Lösung des Anfangswertproblems auf eine viel sorgfältigere Art als beim hier beschriebenen Verfahren vorgenommen wird.

22. Über die Richtung der Annäherung beim Differenzenverfahren. Während in fast allen dem Verfasser bekannt gewordenen Beispielen die nach dem Verfahren erster Annäherung berechneten Näherungswerte kleiner sind als die exakten Eigenwerte, so gibt es doch Gegenbeispiele, die zeigen, daß diese Konvergenz von unten her nicht immer beim Differenzenverfahren auftreten muß. (Einfache Gegenbeispiele sind genannt in [C. 2], S. 201 und 215.) Bei

$$f'' + \lambda \frac{5 - 3\sin^2 x}{9 - \sin^2 x} f = 0 \qquad f(0) = f(\pi) = 0$$

gehört die exakte erste Eigenlösung $f = \sin x + \frac{\sin 3x}{33}$ zum Eigenwert $\lambda_1 = 3$, während das Differenzenverfahren mit $h = \frac{\pi}{2}$ den größeren Wert $\Lambda_1^{(2)} = \frac{32}{\pi^2} \approx 3{,}24$ liefert.

Ein anderes Gegenbeispiel, bei dem die Konvergenz von unten bzw. von oben her von der Art der Ersetzung der Differentialgleichung durch eine finite Gleichung abhängt, nannte mir freundlicherweise Herr Prof. Dr. F. Rellich: Bei der Besselschen Differentialgleichung

$$x f'' + f' + \lambda^2 x f = 0, \qquad f'(0) = f(1) = 0$$

sind die exakten Eigenwerte gegeben durch die Nullstellen von $J_0(x)$ zu $\lambda_1 = 2{,}4048$, $\lambda_2 = 5{,}520$, $\lambda_3 = 8{,}654, \ldots$ Benutzt man

a) die symmetrisch gebauten Differenzengleichungen

$$\left(i + \frac{1}{2}\right)(F_{i+1} - F_i) - \left(i - \frac{1}{2}\right)(F_i - F_{i-1}) + \Lambda^2 h^2 i F_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

oder mit der Abkürzung $\Lambda^2 h^2 - 2 = \mu$:

$$\left(i + \frac{1}{2}\right) F_{i+1} + \mu i F_i + \left(i - \frac{1}{2}\right) F_{i-1} = 0, \qquad F_1 - F_0 = 0, \qquad F_n = 0,$$

so erhält man für den ersten Eigenwert Annäherungen von oben her, für die höheren Eigenwerte von unten her:

$$h = \frac{1}{2}: \quad \Lambda_1^{(2)} = 2{,}449$$

$$h = \frac{1}{3}: \quad \Lambda_1^{(3)} = 2{,}438 \qquad \Lambda_2^{(3)} = 5{,}06$$

$$h = \frac{1}{4}: \quad \Lambda_1^{(4)} = 2{,}426 \qquad \Lambda_2^{(4)} = 5{,}32 \qquad \Lambda_3^{(4)} = 7{,}34\,,$$

b) die weniger symmetrisch gebauten Gleichungen

$$i(F_{i+1} - 2F_i + F_{i-1}) + (F_i - F_{i-1}) + \Lambda^2 h^2 i F_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

$F_1 - F_0 = 0$, $F_n = 0$, so erhält man Annäherung von unten und zugleich sehr viel schlechtere Werte als bei a).

$$h = \frac{1}{2}: \quad \Lambda_1^{(2)} = 2$$

$$h = \frac{1}{3}: \quad \Lambda_1^{(3)} = 2{,}12 \qquad \Lambda_2^{(3)} = 4{,}24\,.$$

Beim Differenzenverfahren höherer Annäherung sind die Fälle der Konvergenz der $\Lambda_\varrho^{(n)}$ gegen λ_ϱ von oben her relativ häufiger (vgl. außer den in der Tafel V aufgeführten Beispielen auch [C. 1] S. 11).

Es wäre schon von großer Bedeutung, wenn man wenigstens bei den einfachsten Klassen von Eigenwertproblemen hinreichende Kriterien hätte, die aussagen, wann die nach dem Differenzenverfahren berechneten Näherungswerte $\Lambda_\varrho^{(n)}$ **kleiner** sind als die Eigenwerte λ_ϱ.

Eine den Konvergenzbeweis enthaltende Fehlerabschätzung ist für den ersten Eigenwert $\left(|\Lambda_1^{(n)} - \lambda_1| \leq \text{const}\,\frac{1}{n^2}\right)$ für mehrere Klassen von Eigenwertproblemen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter und vierter Ordnung und bei partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in [C. 2] durchgeführt. Diese Fehlerschranken sagen jedoch nicht aus, ob die Annäherung an den Eigenwert von unten oder von oben her erfolgt. Für die nach dem Differenzenverfahren berechneten höheren Eigenwerte fehlen bisher Fehlerabschätzungen.

23. Das Differenzenverfahren höherer Annäherung für gewöhnliche Differentialgleichungen unterscheidet sich von dem Verfahren erster Annäherung dadurch, daß an Stelle der Differenzenquotienten finite Ausdrücke höherer Annäherung benutzt werden, d. h. solche Ausdrücke, deren Abweichung von den entsprechenden Differentialquotienten mit einer höheren Potenz von h gegen Null gehen als bei den Differenzenquotienten.

Tafel II. Finite Ausdrücke höherer Annäherung mit Restglied.

$$\left(\frac{dg}{dx}\right)_{x=x_i} = \frac{-g(x_{i+2}) + 8g(x_{i+1}) - 8g(x_{i-1}) + g(x_{i-2})}{12h} + \frac{h^4}{18} m_5$$

$$= \frac{g(x_{i+3}) - 9g(x_{i+2}) + 45g(x_{i+1}) - 45g(x_{i-1}) + 9g(x_{i-2}) - g(x_{i-3})}{60h} + \frac{47h^6}{2100} m_7$$

$$\left(\frac{d^2g}{dx^2}\right)_{x=x_i} = \frac{-g(x_{i+2}) + 16g(x_{i+1}) - 30g(x_i) + 16g(x_{i-1}) - g(x_{i-2})}{12h^2} + \frac{h^4}{54} m_6$$

$$= \frac{2g(x_{i+3}) - 27g(x_{i+2}) + 270g(x_{i+1}) - 490g(x_i) + 270g(x_{i-1}) - 27g(x_{i-2}) + 2g(x_{i-3})}{180h^2} + \frac{47h^6}{8400} m_8$$

$$\left(\frac{d^3g}{dx^3}\right)_{x=x_i} = \frac{-g(x_{i+3}) + 8g(x_{i+2}) - 13g(x_{i+1}) + 13g(x_{i-1}) - 8g(x_{i-2}) + g(x_{i-3})}{8h^3} + \frac{403h^4}{2520} m_7$$

$$\left(\frac{d^4g}{dx^4}\right)_{x=x_i} = \frac{-g(x_{i+3}) + 12g(x_{i+2}) - 39g(x_{i+1}) + 56g(x_i) - 39g(x_{i-1}) + 12g(x_{i-2}) - g(x_{i-3})}{6h^4} + \frac{403h^4}{5040} m_8$$

Die Bedeutung von m_ϱ ist dieselbe wie in der Tafel I von **21**.

Wie beim Differenzenverfahren erster Annäherung wird dann der Differentialgleichung eine finite Gleichung für die unbekannten Näherungswerte F_i gegenübergestellt. Hierbei treten auch über das Intervall hinausragende Werte F_{-1}, F_{n+1}, ... auf und es ist dann erforderlich, für die Randstellen $i = 0$, $i = n$ finite Gleichungen niedrigerer Annäherung aufzustellen, damit man im ganzen ebenso viele Gleichungen erhält, wie unbekannte F_i-Werte vorkommen. (Ein Zahlenbeispiel hierfür bei G. Schulz [S. 3], S. 130/131.)

Eine andere Erweiterung des Differenzenverfahrens ist von russischen Forschern gegeben worden (vgl. z. B. Sch. E. Mikeladse, Nachrichten der Akad. d. Wiss. d. UdSSR. 1934). Es wird hier jedoch nicht weiter auf sie eingegangen, da bei ihr (bei fester Maschenweite h) die zu lösende algebraische Gleichung für die Näherungswerte Λ von höherem Grade und damit für die numerische Rechnung umständlicher wird als bei dem hier beschriebenen Verfahren höherer Annäherung. (Bei dem Verfahren höherer Annäherung besteht die Verbesserung gegenüber dem gewöhnlichen Differenzenverfahren [= Verfahren erster Annäherung] in der Verbesserung der Koeffizienten der algebraischen Gleichung für Λ, ohne im allgemeinen den Grad der Gleichung zu erhöhen.)

24. Bei partiellen Differentialgleichungen (etwa bei zwei unabhängigen Veränderlichen x, y, bei mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen ist das Vorgehen analog) legt man ein rechtwinkliges Gitter von Punkten (x_i, y_k)

$$x_i = x_0 + i\,h, \quad y_k = y_0 + k\,l \qquad (i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \qquad (24.1)$$

in die x-y-Ebene. Die Wahl des Anfangspunktes x_0, y_0 und der Maschenweiten k, l ist an sich willkürlich; meist wird man jedoch bei Berücksichtigung der Randbedingungen zu erreichen suchen, daß die Randkurven und etwaige gradlinige Randstrecken möglichst mit den Gittergeraden (24.1) zusammenfallen. Mit $F_{i,k}$ werden Näherungen für die Werte einer ersten Eigenfunktion $f(x, y)$ an der Stelle x_i, y_k bezeichnet.

Der Differentialgleichung und den Randbedingungen werden jetzt genau wie bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen finite Gleichungen gegenübergestellt. Die den Differentialquotienten entsprechenden finiten Ausdrücke kann man leicht bei Verwendung der „Verschiebungsoperatoren" E_x und E_y bilden, die durch

$$E_x\, g(x, y) = g(x+h, y) \qquad E_y\, g(x, y) = g(x, y+l)$$
$$E_x\, F_{i,k} = F_{i+1,k} \qquad E_y\, F_{i,k} = F_{i,k+1}$$

festgelegt sind. Man kann mit diesen Operatoren wie mit einer algebraischen Größe formal rechnen und sie mit Differentialoperatoren vertauschen. So ist z. B.:

$$E_x^{p}\, g(x, y) = g(x+p\,h, y); \quad E_y^{-p}\, g(x, y) = g(x, y-p\,l); \quad E_x^{k} E_y^{m}\, g(x, y) = g(x+k\,h, y+m\,l).$$

Als Beispiel soll zu $\frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y}$ ein finiter Ausdruck aufgestellt werden. Nach der Tafel I in **21** ist bei Fortlassen der Restglieder

$$\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right)_{0,0} \approx \frac{1}{h^2}(g_{1,0} - 2\,g_{0,0} + g_{-1,0}) = \frac{1}{h^2}(E_x - 2\,E_x^{0} + E_x^{-1})\, g_{0,0},$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_{0,0} \approx \frac{1}{2\,h}(g_{0,1} - g_{0,-1}) = \frac{1}{2\,h}(E_y - E_y^{-1})\, g_{0,0}.$$

Also

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial y}\, g\right)_{0,0} \approx \frac{1}{2\,h}(E_x - 2\,E_x^{0} + E_x^{-1})(E_y - E_y^{-1})\, g_{0,0}$$
$$= \frac{1}{2\,h}(g_{1,1} - 2\,g_{0,1} + g_{-1,1} + g_{1,-1} - 2\,g_{0,-1} + g_{-1,-1}).$$

Für die oft vorkommenden Operatoren Δ und $\Delta\Delta$ erhält man (vgl. [S. 3] S. 133 bis 135)

Tafel III. Finite Ausdrücke für die Operatoren Δ und $\Delta\Delta$.

Ausdrücke erster Annäherung:

$$\Delta\, g(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 g(x_0, y_0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g(x_0, y_0)}{\partial y^2}$$
$$= \frac{1}{h^2}(g_{1,0} + g_{0,1} + g_{-1,0} + g_{0,-1} - 4\,g_{0,0}) + \frac{1}{6}\, h^2 m_4$$

$$\Delta\Delta\, g(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right) g(x_0, y_0)$$
$$= \frac{1}{h^4}[20\,g_{0,0} - 8\,(g_{0,1} + g_{1,0} + g_{-1,0} + g_{0,-1})$$
$$+ 2\,(g_{1,1} + g_{1,-1} + g_{-1,1} + g_{-1-1}) + g_{0,2} + g_{2,0} + g_{-2,0} + g_{0,-2})] + \text{const}\, h^2 m_6.$$

Ausdrücke zweiter Annäherung:

$$\Delta\, g(x_0, y_0) = \frac{1}{12\,h^2}[-g_{2,0} + g_{0,2} + g_{-2,0} + g_{0,-2})$$
$$+ 16\,(g_{1,0} + g_{0,1} + g_{-1,0} + g_{0,-1}) - 60\,g_{0,0}] + \frac{1}{27}\, h^4 m_6$$

$$\Delta\Delta\, g(x_0, y_0) = \frac{1}{6\,h^4}[-(g_{0,3} + g_{0,-3} + g_{3,0} + g_{-3,0})$$
$$+ 14\,(g_{0,2} + g_{0,-2} + g_{2,0} + g_{-2,0}) - 77\,(g_{0,1} + g_{0,-1} + g_{1,0} + g_{-1,0})$$
$$+ 184\,g_{0,0} + 20\,(g_{1,1} + g_{1,-1} + g_{-1,1} + g_{-1,-1})$$
$$-(g_{1,2} + g_{2,1} + g_{1,-2} + g_{2,-1} + g_{-1,2} + g_{-2,1} + g_{-1,-2} + g_{-2,-1})] + \text{const}\, h^4 m_8$$

Dabei ist m_ϱ eine Zahl, die ihrem Betrage nach das Maximum der Beträge aller ϱ-ten partiellen Ableitungen von $g(x, y)$ in einem alle vorkommenden Gitterpunkte enthaltenden konvexen Gebiet nicht übersteigt.

Man hat dann der Differentialgleichung und den Randbedingungen so viele finite Gleichungen gegenüberzustellen, bis die Anzahl der Unbekannten F_{ik} mit der der Gleichungen übereinstimmt. Bei Verwendung von finiten Gleichungen höherer Annäherung muß man dabei am Rande Gleichungen niedrigerer Annäherung hinzuziehen, da sonst wegen der über den Rand hinausragenden F_{ik}-Werte Gleichungen fehlen. Zahlenbeispiele haben gezeigt, daß es zur Erzielung besserer Ergebnisse wichtiger ist, für die höchsten vorkommenden Ableitungen genauere Ausdrücke zu verwenden als für die niedrigeren Ableitungen, daß es also ungünstig ist, wenn man nur die niedrigeren Ableitungen durch genauere Ausdrücke ersetzt und die höheren Ableitungen nicht. (Dieser Gedanke wäre an sich naheliegend, weil man dabei das zu starke Hinausgreifen über den Rand vermeiden würde.) Ein ausführliches Zahlenbeispiel für das Verfahren erster und zweiter Annäherung steht bei G. Schulz [S. 3], S. 139 bis 141. Für das Verfahren erster Annäherung finden sich Beispiele bei Burchard [B. 5][11]).

[11]) Der im nächsten Heft erscheinende zweite Teil dieses Berichtes wird die Methoden der Störungsrechnung und verschiedene andere Methoden sowie Zahlenbeispiele bringen.

KLEINE MITTEILUNGEN

Anwendung des erweiterten Satzes von Menelaos in der Nomographie. Max Zacharias hat den Satz von Menelaos, dessen Verwendung zur Konstruktion von Fluchtliniennomogrammen zuerst von Möbius (Werke, Bd. IV S. 620) vorgeschlagen wurde, auf ebene einfache n-Ecke erweitert [1]). Ein einfaches ebenes n-Eck sei irgendwie durch Diagonalen in Teildreiecke zerlegt, deren Ecken Ecken des n-Eckes sind. Eine solche Teilung des n-Eckes heiße „Diagonalteilung". Auf jeder Seite $A_i A_{i+1}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n;\ A_{n+1} \equiv A_1)$ des n-Eckes liege ein Punkt X_i und auf jeder zur Diagonalteilung benutzten Diagonale $A_k A_l$ ein Punkt X_{kl}.

Wenn die drei Punkte X auf den Seiten jedes Teildreieckes ein Menelaostripel bilden, dann sagen wir, die Punkte X_i und X_{kl} bilden ein Menelaosnetz. X_i seien dessen Außen- und X_{kl} dessen Innenpunkte. Es gilt dann der Satz: *Bilden n Punkte X_i auf den Seiten $A_i A_{i+1}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n;\ A_{n+1} \equiv A_1)$ eines einfachen ebenen n-Eckes $A_1, A_2, \ldots A_n$ bei irgendeiner Diagonalteilung N die Außenpunkte eines Menelaosnetzes, so bilden sie auch bei jeder andern möglichen Diagonalteilung N' die Außenpunkte eines Menelaosnetzes, und es gilt die Gleichung*

$$\frac{A_1 X_1}{X_1 A_2} \cdot \frac{A_2 X_2}{X_2 A_3} \cdots \frac{A_n X_n}{X_n A_1} = (-1)^n.$$

Aus diesem Satz sollen einige Folgerungen für gewisse Fluchtliniennomogramme mit geradlinigen Leiternträgern gezogen werden. Wenn sich eine Funktion in n Veränderlichen

$$F(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

in der Form

$$\prod_{i=1}^{n} f_i(z_i) = (-1)^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

darstellen läßt, so erhält man ein Fluchtliniennomogramm mit geradlinigen Leiternträgern und geradlinigen Zapfenlinien, wenn man die Seiten $A_i A_{i+1}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n;\ A_{n+1} \equiv A_1)$ eines beliebigen einfachen ebenen n-Eckes als Leiternträger für die Veränderlichen z_i auffaßt. Die Bezifferung der Leitern folgt aus

$$\frac{A_i X_i}{X_i A_{i+1}} = f_i(z_i) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

[1]) Max Zacharias: Die Sätze von Menelaos und Ceva für ebene Vielecke, in: Deutsche Mathematik, 1. Jahrg., 4. H., S. 504 ff.

und kann durch Projektion aus den geradlinigen Funktionsleitern

$$x_i = f_i(z_i)$$

erhalten werden.

Die Diagonalen jeder möglichen Diagonalteilung sind die Zapfenlinien dieses Nomogramms. Je nach der gewählten Diagonalteilung erhält man daher verschiedene Zapfenlinien, ohne daß das Nomogramm umgezeichnet werden müßte. Bild 1 gibt einen der möglichen Ablesevorgänge für $n = 5$ an.

Läßt sich die gegebene Funktion (1) in der Form

$$\sum_{i=1}^{n} g_i(z_i) = 0$$

darstellen, so führt die Substitution

$$g_i(z_i) = \log f_i(z_1) \qquad \text{i} = 1, 2, \ldots . n$$

direkt auf die Form (2), wenn n eine gerade Zahl ist.

Ist n aber eine ungerade Zahl, so substituiert man

$$g_k(z_k) = \log(-f_k(z_k))$$

$$g_i(z_i) = \log f_i(z_i) \begin{cases} i \neq k \\ i = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

und erhält auch hier die Form (2).

Die freie Wahl der Diagonalteilung hat nicht nur theoretisches Interesse, sondern man kann Ableseungenauigkeiten, die durch Schleifschnitte zwischen Ablesegeraden und Zapfenlinie bei einer Diagonalteilung auftreten, durch Wahl einer andern Diagonalteilung vermeiden.

Bild 2 gilt für $n = 4$. Die Zapfenlinie I gehört zu den Ablesegeraden $(X_1 X_4)$, $(X_2 X_3)$ die Zapfenlinie II zu den Ablesegeraden $(X_1 X_2)$, $(X_3 X_4)$.

Jedes Fluchtliniennomogramm mit vier geradlinigen Leiternträgern und einer geradlinigen Zapfenlinie hat diese Eigenschaft, wenn die Zapfenlinie durch die Schnittpunkte von je zwei nicht durch Ablesegeraden aneinander geknüpfte Leiternträger geht.

Wird ein solches auf dem erweiterten Satz von Menelaos aufgebautes Fluchtliniennomogramm kollinear transformiert, so behält es die oben angeführten Eigenschaften, weil diese nur auf Lagen-, nicht auf Maßbeziehungen beruhen und daher durch eine Kollineation nicht geändert werden. Es werden aber dadurch i. a. die Verhältnisse zweier Strecken geändert, d. h.

$$\frac{A_i X_i}{X_i A_{i+1}} = f_i(z_i) \neq \frac{A_i' X_i'}{X_i' A_{i+1}'}.$$

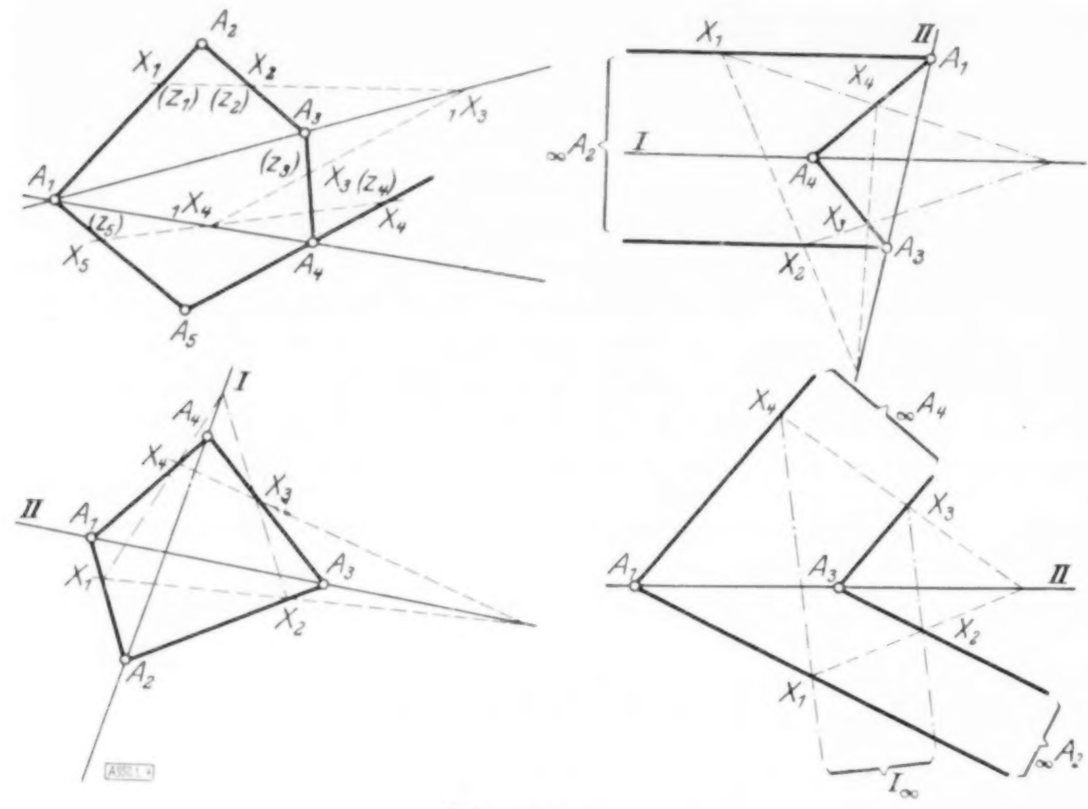


Bild 1 bis 4.

Verschwindungslinie der Kollineation, so folgt das in Bild 4 dargestellte Fluchtliniennomogramm, dessen eine Zapfenlinie die unendlichferne Gerade ist.

Beispiel. Für den durch Biegung beanspruchten Balken mit rechteckigem Querschnitt gilt die Formel

$$M_b = \sigma_R \cdot \frac{b\,h^2}{6} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

in der M_b das in kg/cm gemessene Biegungsmoment, b die Breite, h die Höhe des Querschnittrechteckes in cm gemessen und σ_R die sich daraus in kg/cm² ergebende Randspannung bedeuten.

Wird (4) in der Form

$$\frac{10^6}{M_b} \cdot \frac{b}{10} \cdot \frac{h^2}{600} \cdot \frac{\sigma_R}{1000} = 1 \quad . \quad . \quad (5)$$

Das kann benützt werden, wenn die aus (3) entstehende Leiternteilung für den besonders benötigten Ablesebereich ungeeignet, weil zu eng ist, denn man kann die verzerrende Kollineation so wählen, daß die Teilung in dem benötigten Ablesebereich weiter, also verwendbarer wird.

Solche Kollineationen liefern auch Sonderfälle des in Bild 2 dargestellten Nomogramms.

Wird Bild 2 so zentrisch kollinear transformiert, daß die Verschwindungslinie der Kollineation durch A_2 und durch keinen der anderen Eckpunkte des Grundviereckes hindurchgeht, so erhält man das in Bild 3 dargestellte Fluchtliniennomogramm. Wird jedoch die Gerade $A_2 A_4$ zur

geschrieben, so erhält man ein Beispiel für (2), in dem $n = 4$ ist, das also durch ein Nomogramm von der in Bild 2 gezeichneten Form dargestellt werden kann. Die nach (3) sich ergebenden Teilungen für die Leitern

$$\frac{A_1 X_1}{X_1 A_2} = \frac{10^6}{M_b}, \qquad \frac{A_2 X_2}{X_2 A_3} = \frac{b}{10},$$

$$\frac{A_3 X_3}{X_3 A_4} = \frac{h^2}{600}, \qquad \frac{A_4 X_4}{X_4 A_1} = \frac{\sigma_R}{1000}$$

sind aber besonders für M_b und σ_R in den vorwiegend benötigten Bereichen zu eng. Es emp-

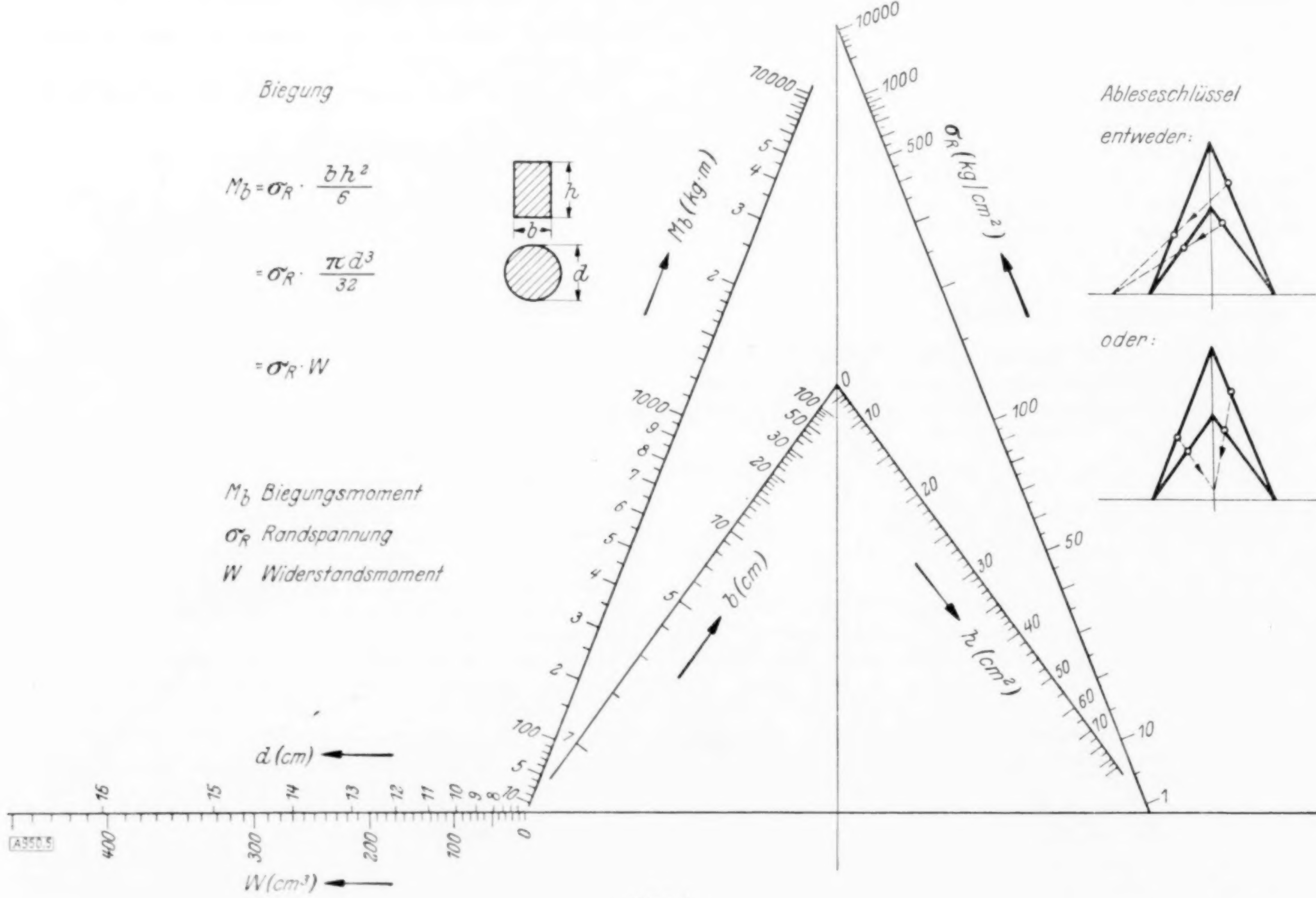


Bild 5.

fiehlt sich daher eine Kollineation des gezeichneten Nomogramms. Bild 5 zeigt das so transformierte Nomogramm in einer Form, in der es für tatsächliche Ablesungen geeignet ist. Die zweite Zapfenlinie, auf der sich die Ablesegeraden $(b\,h)$ und $(M_b\,\sigma_R)$ schneiden, wurde mit einer Teilung für das Widerstandsmoment $W=\frac{b\,h^2}{6}$ versehen und erhält noch eine zweite Teilung, die sich auf das Widerstandsmoment eines Kreisquerschnitts $W=\frac{\pi\,d^3}{32}$ bezieht und mit den Werten des Kreisdurchmessers d beziffert wurde.

In Bild 5 erhält man also durch die Existenz einer zweiten Zapfenlinie nicht nur die Möglichkeit, durch Schleifschnitte beim Ablesevorgang entstehende Ableseungenauigkeiten zu vermeiden, sondern das Nomogramm wurde außer für rechteckige auch für kreisförmige und andere Querschnitte verwendbar. Die Bezifferung mit den Werten von W gestattet z. B. eine Verwendung für Normalprofile, deren Widerstandsmomente tabelliert sind.

Diese mehrfache Möglichkeit, evtl. beide Zapfenlinien zu beziffern, wird sich nicht selten ergeben und bildet einen weiteren Vorteil der entwickelten Nomogrammform.

Außig. Wilhelm Richter. 950

Über die Darstellung gewisser, in der Theorie der Flügelschwingungen auftretender Integrale durch Zylinderfunktionen. In der Wagner-Glauertschen[1]) Theorie des instationären Auftriebs und Moments, die auf ein in ebener gleichmäßiger Strömung harmonisch schwingendes, geradliniges Profil wirken, sind bekanntlich folgende bestimmte Integrale von Wichtigkeit:

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin 2\,k\,x}{\sqrt{x+x^2}}\,d\,x;\qquad \int_0^\infty \frac{\cos 2\,k\,x}{\sqrt{x+x^2}}\,d\,x;\\[2ex] \displaystyle\int_0^\infty\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)\sin 2\,k\,x\,d\,x;\\[2ex] \displaystyle\int_0^\infty\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)\cos 2\,k\,x\,d\,x\end{array}\right\}\quad .\;.\;.\;(1).$$

Die Konvergenz dieser uneigentlichen Integrale ist bei reellem k, das uns hier ausschließlich interessiert, leicht ersichtlich. — Ihre numerische Berechnung für einige Werte des Parameters k hat zuerst Glauert durch Reihenentwicklungen ausgeführt[1]). Nachher hat aber Herr v. Borbely streng bewiesen, daß sie auch in geschlossener Form durch Zylinderfunktionen ausdrückbar sind[2]). Jedoch ist der von ihm entwickelte, auf Sätzen aus der Funktionentheorie gegründete Beweis ziemlich lang und verwickelt. Nachstehend soll gezeigt werden, daß man diese Darstellung ganz anders und äußerst einfach beweisen kann, ohne jede Benutzung funktionentheoretischer Hilfsmittel.

[1]) H. Wagner: Über die Entstehung des dynamischen Auftriebes von Tragflügeln. Z. angew. Math. Mech. Bd. 5 (1925), S. 17. — H. Glauert: The Force and Moment on an Oscillating Aerofoil. Aeronautical Research Committee. R & M. No. 1242 (London 1929).

[2]) Von Borbely: Mathematischer Beitrag zur Theorie der Flügelschwingungen. Z. angew. Math. Mech. Bd. 16 (1936), S. 1. — Vgl. auch W. F. Durand: Aerodynamic Theory. Bd. II; Artikel von J. M. Burgers, S. 294, 295, 302.

Zu diesem Zweck führen wir in die gesuchten Integrale (1) die grundlegende Substitution ein:

$$2\,x=\mathfrak{Cof}\,t-1.$$

Hiermit nehmen diese Integrale die Gestalt an:

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^\infty \sin(k\,\mathfrak{Cof}\,t-k)\,d\,t;\\[2ex] \displaystyle\int_0^\infty \cos(k\,\mathfrak{Cof}\,t-k)\,d\,t;\\[2ex] \displaystyle\frac{1}{2}\int_0^\infty (1+e^{-t})\sin(k\,\mathfrak{Cof}\,t-k)\,d\,t;\\[2ex] \displaystyle\frac{1}{2}\int_0^\infty (1+e^{-t})\cos(k\,\mathfrak{Cof}\,t-k)\,d\,t\end{array}\right\}\quad .\;(2).$$

Auf diese Weise reduziert sich die Aufgabe auf die Bestimmung folgender vier Integrale:

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\varphi_1(k)=\int_0^\infty \sin(k\,\mathfrak{Cof}\,t)\,d\,t;\\[2ex] \displaystyle\varphi_2(k)=\int_0^\infty \cos(k\,\mathfrak{Cof}\,t)\,d\,t\end{array}\right\}\quad .\;.\;.\;.\;(3),$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle f_1(k)=\int_0^\infty e^{-t}\sin(k\,\mathfrak{Cof}\,t)\,d\,t;\\[2ex] \displaystyle f_2(k)=\int_0^\infty e^{-t}\cos(k\,\mathfrak{Cof}\,t)\,d\,t\end{array}\right\}\quad .\;.\;.\;(4).$$

Es genügt nun, die bekannten Mehler-Sonineschen Integraldarstellungen der Besselschen und Neumannschen Zylinderfunktionen nullter Ordnung[3])

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle J_0(k)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin(k\,\mathfrak{Cof}\,t)\,d\,t,\\[2ex] \displaystyle N_0(k)=-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos(k\,\mathfrak{Cof}\,t)\,d\,t\end{array}\right\}\quad .\;.\;(5)$$

anzuführen, um ohne weiteres zu erkennen, daß die gesuchten Integrale (3) sich von diesen Zylinderfunktionen nur durch konstante Koeffiziente $\pm\frac{\pi}{2}$ unterscheiden:

$$\varphi_1(k)=\frac{\pi}{2}\,J_0(k);\qquad \varphi_2(k)=-\frac{\pi}{2}\,N_0(k).$$

Um jetzt auch die entsprechende Darstellung der übriggebliebenen Integralen (4) zu gewinnen, verfahren wir folgendermaßen. — Wir beginnen mit der Behandlung der Funktion $f_1(k)$. Nach (4) und (5) läßt sich unmittelbar folgender Ausdruck für ihre Ableitung bilden:

$$\begin{aligned}f_1'(k)&=\int_0^\infty e^{-t}\,\mathfrak{Cof}\,t\cdot\cos(k\,\mathfrak{Cof}\,t)\,d\,t\\&=-\frac{\pi}{4}\,N_0(k)+\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-2t}\cos(k\,\mathfrak{Cof}\,t)\,d\,t.\end{aligned}$$

[3]) Vgl. G. N. Watson: A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Cambridge 1922, S. 180. — Es ist zu beachten, daß dort die Neumannschen Zylinderfunktionen N mit dem Buchstaben Y bezeichnet sind.

Anderseits kann man die Integraldarstellung (4) von $f_1(k)$ mittels partieller Integration wie folgt umformen:

$$f_1(k) = \sin k - \frac{\pi}{4} k N_0(k) - \frac{k}{2} \int_0^\infty e^{-2t} \cos(k \operatorname{Coj} t)\, dt.$$

An Hand der beiden Formeln erhalten wir:

$$[k f_1(k)]' = f_1(k) + k f_1'(k) = \sin k - \frac{\pi}{2} k N_0(k).$$

Hieraus ergibt sich sofort die gesuchte Darstellung

$$f_1(k) = -\frac{\cos k}{k} - \frac{\pi}{2} N_1(k) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6),$$

man muß dabei nur die bekannte Funktionalgleichung für die Neumannschen Funktionen nullter und erster Ordnung[4])

$$k N_0(k) = [k N_1(k)]'$$

beachten und folgende Relationen berücksichtigen:

$$\lim_{k=0} [k f_1(k)] = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{k=0} [k N_1(k)] = -\frac{2}{\pi};$$

der erste Grenzwert folgt nach (4) unmittelbar durch Abschätzung:

$|f_1(k)| \leq \int_0^\infty e^{-t}\, dt = 1$; der zweite — aus der bekannten Laurentschen Reihe für die Neumannsche Zylinderfunktion erster Ordnung $N_1(k)$[5]).

Da nun die Funktionalgleichungen für die Besselschen und Neumannschen Funktionen dieselben sind, finden wir in der gleichen Weise — bei Beachtung von $J_1(0) = 0$ — die entsprechende Formel:

$$f_2(k) = \frac{\sin k}{k} - \frac{\pi}{2} J_1(k) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Vermöge dieser Darstellungen (6) und (7) kann man die erwähnten Integrale (1) durch trigonometrische und Zylinderfunktionen nullter und erster Ordnung unmittelbar ausdrücken. Die Ergebnisse decken sich natürlich mit denen, von Herrn v. Borbely angegebenen, vollkommen.

Warschau. Julian Bonder. 969

[4]) Vgl. G. N. Watson (l. c. S. 66.

[5]) Vgl. G. N. Watson (l. c.) S. 62 und 64.

BUCHBESPRECHUNGEN

WILHELM **LOREY,** Der Deutsche Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts. E. V. 1891—1938. Ein Rückblick zugleich auch auf die mathematische und naturwissenschaftliche Erziehung und Bildung in den letzten fünfzig Jahren. Verfaßt im Auftrag des letzten Vorstands. 165 S. mit 28 Bildern. Frankfurt a. M. 1938, Verlag Otto Salle.

Es erscheint mir angebracht, diese Schrift auch in dieser Zeitschrift anzuzeigen, da sie abgesehen von ihrem allgemeinen Interesse noch das besondere finden wird, daß sie wertvolle Aufschlüsse über das Entstehen des Prüfungsfaches und der Lehrbefähigung für Angewandte Mathematik gibt. Schon allein der Auszug aus Felix Kleins nicht gedruckter Erlanger Antrittsrede, den Lorey auf Seite 20 gibt, dürfte auch heute noch aktuell sein, haben wir doch zwar zweifellos in Deutschland heute eine Blüte der angewandten Mathematik und Mechanik, aber die Bestrebungen Kleins auf Belebung eines entsprechenden Unterrichtsfaches auf der höheren Schule haben noch nicht den Erfolg gehabt, den wir im Interesse der Sache und der Verbindung von Schule und Leben wünschen müssen.

Die vorliegende Schrift gibt äußerlich die Geschichte eines Vereins, der nahezu fünfzig Jahre Wesentliches für die Reform des Unterrichtes getan hat und nun in den NSLB. aufgegangen ist. Der Rückblick ist berechtigt. Denn innerlich ist es eine Geschichte des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichtes und der in ihm wirksamen Bestrebungen, wenigstens in großen Zügen. Da der Verf. die ganze Entwicklung miterlebt und vielfach mitbeeinflußt hat, ist die Schrift lebendig geschrieben und wegen ihrer vielen Anmerkungen, auch persönlicher Art, eine Fundgrube für den Historiker. Sie gliedert sich in sieben Kapitel, die historisch angeordnet sind: Vorgeschichte und Gründung des Vereins; die Gründung der Unterrichtsblätter, Felix Klein; Naturforscher- und Ärzteversammlung 1901, Meraner Lehrplan; Die internationale mathematische Unterrichtskommission, der deutsche Ausschuß für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht; der Weltkrieg und die Inflationszeit; die Preußischen Richtlinien; der Förderverein im Dritten Reich. Das letzte Drittel sind Anmerkungen, Ergänzungen usw.

Jeder, der für die Wirkung der Wissenschaft durch den Unterricht auf das Volksganze Empfinden hat, sollte an dieser Schrift nicht vorübergehen.

Berlin. G. Hamel. 947

Dr. sc. techn. ALFRED **GERBER,** Untersuchungen über Grenzschichtabsaugung (Mitteilungen aus dem Institut für Aerodynamik, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, Nr. 6). 70 S. m. 60 Abb. Zürich 1938, Verlag A.G. Gebr. Leemann & Co. Preis 5,50 frs.

Diese Arbeit bringt neues Material über die Absaugemengen und -leistungen, die zu einer bestimmten Herabsetzung der Verdrängungsdichte der Grenzschicht benötigt werden. Es werden Grenzschichten an einer ebenen Platte ohne äußeres Druckgefälle gemessen, ferner solche an einer Wand, die aus zwei unter einem Winkel aneinanderstoßenden Ebenenstücken gebildet ist. Um die Wirkung der Absaugung deutlich meßbar zu machen, ist die Grenzschicht vor der Absaugung durch Vorschalten einer rauhen Anlaufstrecke künstlich verbreitert. In dem zweiten untersuchten Falle zeigt sich erwartungsgemäß, daß der Druckanstieg vor der Knickstelle bei wachsender Grenzschicht immer mehr unter dem theoretischen Wert bleibt. Da dieser Einfluß ganz ähnlich bei dem Zustandekommen des Formwiderstandes von Tragflügeln mitwirkt, so ist seine Herabsetzung durch Absaugung praktisch interessant. Die Versuchsergebnisse über die Abhängigkeit der benötigten Absaugeleistung von der Form der Schlitze, durch die man absaugt, stimmen mit früheren von O. Schrenk überein. Dem Konstrukteur wird das neue, übersichtlich geordnete Versuchsmaterial sehr willkommen sein.

Im Anhang werden einige Messungen an einem dicken Joukowskyprofil mit Schlitzflügel und Fowlerklappe mitgeteilt. Für diese sehr zeitgemäße Beigabe wird der Leser dankbar sein.

Dresden. W. Tollmien. 960

Dr. phil. WILHELM **SPÄTH** VDI, Physik der mechanischen Werkstoffprüfung. VI + 179 S. m. 84 Abb. Berlin 1938, Verlag Julius Springer. Preis geb. 14,60 M.

Bereits aus dem Titel dieses Werkes geht hervor, daß sein Verfasser sich nicht nur mit der Mechanik der Werkstoffprüfung befaßt, sondern darüber hinaus auch auf alle Fragen eingeht, die vom physikalischen Standpunkt aus an die technischen Wissenschaften auf diesem Gebiet zu stellen sind. Dr. Späth hat den schwierigen Stoff dieser Arbeit in 13 Hauptabschnitte zerlegt und gibt zunächst für jeden dieser Teile theoretische Erklärungen. Er weist dann auf die Folgerungen hin und erteilt schließlich Anweisungen für die praktische Anwendung. Dies alles geschieht in meisterhafter Darstellung, aus der sich sofort der dem gesamten Stoff überlegene Fachmann offenbart. Man kann im Zweifel sein darüber, ob die klaren theoretischen Herleitungen oder die treffenden charakteristischen Abbildungen höher zu bewerten sind. Der Wert dieser vorzüglichen Arbeit möge nicht durch Herausgreifen von Einzelheiten hervorgehoben werden, es sei vielmehr auf eine wichtige Lehre hingewiesen, an die Dr. Späth immer und immer wieder ermahnt. Die Herstellung von Maschinen, mit denen man statische oder dynamische Kräfte von beliebiger Größe ausüben kann, bereitet durchaus keine Schwierigkeiten. Die Schwierigkeit besteht jedoch darin, zu erkennen und zu wissen: Welches ist die Wirkungsweise eines solchen Kraftmessers, zeigt er das an, was wir wissen wollen, oder sagt er uns überhaupt nichts aus. Bevor diese an ein derartiges Meßgerät zu stellende Anforderung nicht erfüllt ist, kann es nur mit großer Vorsicht benützt werden, und in manchen Fällen muß es sogar als Materialprüfungsmaschine ausscheiden. Die sich öfters widersprechenden Ergebnisse verschiedener Forschungsarbeiten finden mitunter ihre Erklärung auch darin, daß die in dem angeführten Sinn zu beachtenden Maßnahmen übersehen wurden. Alle diese Fragen, auf die Dr. Späth stets eine eindeutige Antwort gibt, gehen aber nicht allein den Ingenieur im Materialprüfungswesen an, sondern sind für jeden Maschineningenieur von grundlegender Bedeutung. Es ist daher das Studium dieses einzigartigen Werkes jedem Ingenieur warm ans Herz zu legen.

Dr. Späth hat sich in der deutschen Ingenieurwissenschaft durch seine schöne Arbeit ein bleibendes Verdienst erworben.

Dresden. Findeisen. 979

Professor Dr. WILHELM **HORT**, Die Differentialgleichungen der Technik und Physik. 3. Aufl. des Lehrbuches „Die Differentialgleichungen des Ingenieurs". Bearb. von Dr. phil. Alfred Thoma, wissensch. Mitarbeiter am Laboratorium für Hochfrequenztechnik und Elektromedizin, Berlin-Lichterfelde. XII + 684 S. m. 329 Abb. im Text. Leipzig 1939, Verlag Johann Ambrosius Barth. Preis geb. 38 M.

Es war Wilhelm Hort nicht mehr vergönnt, die Bearbeitung der 3. Auflage seines in den Kreisen der Praktiker gut eingeführten Werkes über Differentialgleichungen selbst zu Ende zu führen. Auch in der neuen Bearbeitung von anderer Hand ist das Buch seiner Anlage und Tendenz nach eine umfangreiche, leicht faßliche Sammlung von physikalisch und technisch wichtigen Differentialgleichungsaufgaben geblieben, wobei prinzipielle Überlegungen, wie Eindeutigkeitsbetrachtungen, Existenz- und Konvergenzbeweise durchaus zurücktreten. Durch eine straffere Einteilung des ganzen Stoffes ist die Übersichtlichkeit sehr erhöht und manche früher nötige Wiederholung eingespart. Im einzelnen sind viele Verbesserungen angebracht, so besonders im ersten Teil, der eine kurze Einführung in die Differential- und Integralrechnung bringt. Hervorzuheben ist die Neugestaltung des Abschnittes über die Differentialgleichungen der Elektrodynamik. Hierbei ist u. a. der Oberwellendipol mit mancherlei Anwendungen behandelt, ein Problem, das dem eigenen Forschungsgebiet des Bearbeiters angehört.

Es ist gewiß, daß das Hortsche Werk in der neuen Bearbeitung bei voller Wahrung seiner bekannten Eigenart an Brauchbarkeit für den Praktiker noch gewonnen hat.

Dresden. W. Tollmien. 958

Dr. phil. OTTO **HAUPT**, Prof. a. d. Univ. Erlangen, unter Mitarbeit von Dr. phil. GEORG **AUMANN**, Prof. a. d. Univ. Frankfurt a. M., Differential- und Integralrechnung unter besonderer Berücksichtigung neuerer Ergebnisse (Göschens Lehrbücherei, Bd. 24), I. Bd. Einführung in die reelle Analysis. 196 S. m. 2 Fig. Berlin 1938, Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis geb. 11,20 M.

Dgl. Bd. 25, II. Bd. Differentialrechnung. 186 S. m. 1 Fig. Berlin 1938, Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis geb. 9,80 M.

Dgl. Bd. 26. III. Bd. Integralrechnung. 183 S. Berlin 1938, Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis geb. 10,60 M.

Um es gleich vorweg zu sagen: Das ist kein Lehrbuch für den Anfänger, auch nicht für den Studenten, der an einer Universität Mathematik lernen will, es ist ein Buch für den zukünftigen Gelehrten, wenn nicht für diesen selbst. Denn es enthält sehr viel Neues, wenigstens insofern Neues, als es bis jetzt nicht in den Lehrbüchern steht. Darum soll es auch in dieser Zeitschrift besprochen werden, denn kein angewandter Mathematiker kann wissen, was er morgen aus den abstraktesten Teilen der reellen Analysis braucht. Das Werk ist ausgiebig abstrakt, es begründet die reelle Analysis unter weitestgehender Allgemeinheit mengentheoretisch im n-dimensionalen Raum. Man sehe sich im dritten Band am Ende den Stokesschen Satz auf einer F^{k+1} im E_n an. Drei Figuren finden sich im ganzen Werk, zwei im ersten Band, eine im zweiten, bei der Vorführung einer nicht differenzierbaren Funktion und keine im dritten. Gleichwohl darf gesagt werden, daß sich die Verfasser um eine klare und deutliche Darstellung bemühen. Sehr viel wird dem Leser überlassen. Formale Differentiation und Integration erscheinen auf den engsten Raum zusammengedrängt, teilweise als Aufgaben.

Der erste Band zerfällt in zwei Teile: Zahlenfolgen und Funktionen, im ersten Teil auch schon das Wichtigste aus der Reihenlehre. Selbstverständlich oberer und unterer Limes, einiges über Mengen. Bei den Funktionen alle Arten von Stetigkeit, Kompaktheit, Monotonität, beschränkte Variation. Der allgemeinste Begriff der Bogenlänge, konvexe Funktionen. Die zweite Hälfte des Buches bringt die Ausdehnung auf den n-dimensionalen Raum. Allgemeine Wertbereiche und Definitionsbereiche, Vertauschung von Grenzübergängen, Ungleichungen und konvexe Funktionen.

Im zweiten Band die Differentialrechnung. Eigentliche und uneigentliche Ableitungen, rechts- und linksseitige, starker und schwacher Schmiegkreis, Differenzierbarkeit monotoner Funktionen, ihre Nichtdifferenzierbarkeit nur auf einer Nullmenge, genauestes Studium der Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Veränderlicher. Anwendungen auf die Auflösung von Gleichungen, die Funktionaldeterminante, die Abhängigkeit von Funktionen. Im zweiten Band findet sich auch die Integration als Aufsuchen der Stammfunktion.

Der dritte Band ist nun reine Maßtheorie, Jordan-Inhalt, Lebesgue-Maß, Stieltjessches Integral. Auch das Riemannsche Integral kommt vor.

Ein Werk besonderer Art. Wer sich etwa über das Maß k-dimensionaler dehnungsbeschränkter „Oberflächen" im E_n unterrichten lassen will, der greife zu diesem Werk.

Ein Schriftenverzeichnis befindet sich jeweils im Anhang. Im ersten Band werden auch drei Einführungen genannt, alle drei aus demselben Verlag. Ref. empfiehlt dies nicht zur Nachahmung.

Berlin. Hamel. 924

Dr. Dr.-Ing. GEORG **SCHEFFERS,** Lehrbuch der Mathematik zum Selbstunterricht und für Studierende der Naturwissenschaften und der Technik, eine Einführung in die Differential- und Integralrechnung und in die analytische Geometrie. VIII + 743 S. m. 438 Fig. Berlin 1938, Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis geb. 15 M.

Dieses in erster Linie für den Selbstunterricht bestimmte Lehrbuch fängt bei den einfachsten mathematischen Überlegungen an — „Nicht das, was man noch von der Schule her wissen sollte, sondern das, was man wirklich noch davon weiß, ist mir maßgebend gewesen", schreibt der Verfasser im Vorwort — und führt den Leser sehr behutsam in die Differential- und Integralrechnung und in die analytische Geometrie ein. Da die jungen Leute heutzutage nur geringe Vorkenntnisse von der Schule mitbringen und in der langen Zeit zwischen Schulabgang und Studienbeginn noch vieles davon vergessen, wird die bedächtige Art dieses seit dreiunddreißig Jahren bewährten Buches, dessen Verfasser so gut weiß, wo den Anfänger der Schuh drückt, gewiß auch unseren Studenten zusagen. Mir will allerdings scheinen, als ob der Verfasser des Guten bisweilen zuviel getan hat, d. h., daß er z. B. bei der Darstellung des bestimmten Integrals der Rücksicht auf den Leser zuviel vom Geist mathematischer Strenge opferte. Die zahlreichen Beispiele und Übungsaufgaben aus Naturwissenschaft und Technik und die ausgezeichneten Abbildungen, die dem Leser die Mitarbeit sehr erleichtern werden, seien noch besonders erwähnt.

Freiberg (Sa.). Grüß. 954

Professor PAUL B. **FISCHER,** Studienrat am Gymnasium Berlin-Steglitz, Arithmetik (Sammlung Göschen, Nr. 47). 152 S. m. 19 Abb. Berlin 1938, Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis 1,62 M.

Das Büchlein führt vom Begriff der natürlichen Zahl aus zu den Bereichen der ganzen, der rationalen, der reellen und der komplexen Zahlen. Dieser Aufbau des Zahlensystems erfolgt im wesentlichen, der einführenden Natur des Buches entsprechend, von der Anschauung her; axiomatische Betrachtungen werden nur gelegentlich angedeutet. Bisweilen wird auch die geschichtliche Entwicklung zu Hilfe genommen, so etwa bei der Besprechung der natürlichen Zahlen, wo man die verschiedenen Ziffer- und Zahlsysteme dargestellt findet, oder bei der Klärung des Begriffs der Irrationalzahl, wo Verf. vom griechischen Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ zum Theorem von G. Kantor über die umkehrbare Zuordnung aller Punkte einer Geraden zur Gesamtheit aller reellen Zahlen und schließlich zum Dedekindschen Schnitt hinleitet und so dem Leser das Verständnis für jenen schwierigen Begriff allmählich erschließt. In einem Anhang werden dann noch die Grundlagen der arithmetischen und geometrischen Reihen, der Zinseszins- und Rentenrechnung und der Kombinatorik sowie der Beweis des binomischen Satzes für ganze positive Exponenten gegeben. Das Büchlein kann allen denen empfohlen werden, die eine leichtfaßliche Einführung in das Gebiet der niederen Arithmetik wünschen.

Berlin. E. Mosch. 915

M. H. A. NEWMAN, M. A., F. R. S., Fellow of St. John's College, Elements of the Topology of Plane Sets of Points. VIII + 221 S. Cambridge 1939, Cambridge University Press. Preis 12 sh 6 d.

Klare und übersichtliche Einführung in die mengentheoretische Topologie unter Beschränkung auf die ebene Geometrie. Im ersten Teil werden die wichtigsten Dinge über ebene Punktmengen gebracht (Abzählbarkeit, geschlossene und offene Mengen, Homomorphie und stetige Abbildung, Zusammenhang), im zweiten Teil die Anwendungen dieser Begriffe auf die ebene Topologie (Alexanders Lemma, Jordans Satz, einfach zusammenhängende Gebiete . . .). Als Einführung in diesen abstrakten Zweig der Geometrie auch zur Grundlegung der Theorie der Funktionen von einer komplexen veränderlichen empfehlenswert.

Hamburg. W. Blaschke. 978

OTTO **KÖHLER,** ULRICH **GRAF,** CURT **CALOV,** Mathematische Raumbilder, Reihe A, Mappe I, Die platonischen Körper, Mappe II, Einfache mathematische Raumformen, 1. Teil, Mappe III, Einfache mathematische Raumformen, 2. Teil, Mappe IV, Modelle zur Elementar-Geometrie, Mappe V, Die Kegelschnitte, Mappe VI, Sphärische Geometrie, 1. Teil: Zur mathematischen Erdkunde. Dresden 1939, Verlag L. Ehlermann. Preis je Mappe 1 M.

Durch Modelle die Entwicklung der Raumanschauung zu fördern, ist ein alter Gedanke; und ebenso alt ist die Erkenntnis der Schwierigkeiten, denen die Beschaffung geeigneter Modelle und ihre Verwendung vor einem größeren Zuhörerkreis unterliegt. Auch der Gedanke, an ihrer Stelle stereoskopische Raumbilder zu benutzen, ist nicht neu; seine Anwendung für Unterrichtszwecke ist durch die Vereinfachung des Stereoskopes zur rot-grünen Brille der Verwirklichung nahegebracht worden. Ein Verdienst aber ist es nun, den stereoskopischen Raumbildern eine so geschickte einheitliche Anordnung zu geben, daß sie leicht zu handhaben sind, lehrreich und schön zugleich wirken und weite Ausdehnungsmöglichkeit besitzen. Die vorliegenden sechs Mappen werden sicherlich dazu dienen, ihren Benutzern die dargestellten geometrischen Gebilde verständlich zu machen und das Raumgefühl zu steigern.

Dresden. W. Ludwig 976

T. G. **Room,** M. A., Professor of Mathematics in the University of Sidney, The Geometry of Determinantal Loci. XXVIII + 483 S. Cambridge 1938, The University Press. Preis geb. 42 Schilling.

Mehrdimensionale Geometrie ist nicht nur um ihrer selbst willen interessant, sondern von ihren Begriffen und Ergebnissen können auch andere Gebiete der Mathematik und selbst die Mechanik Nutzen ziehen; schon bei d'Alembert und bei Lagrange finden sich Gedanken solcher Art. Das vorliegende Werk stellt mit großer Sorgfalt und Aus-

führlichkeit die Theorie der „projektiv erzeugten Mannigfaltigkeiten“ dar und definiert diese als „determinantal loci“ in folgender Weise: $p \cdot q$ lineare Funktionen der Koordinaten in einem n-dimensionalen Raum seien in der Form einer Matrix von p Zeilen und q Spalten angeordnet; durch Nullsetzung aller Determinanten eines bestimmten Grades in dieser Matrix entsteht ein Gleichungssystem, und der Ort aller Punkte, die es erfüllen, ist ein „determinantal locus“. Die projektiven Erzeugungen der Kegelschnitte, der Flächen zweiten Grades und der Raumkurven dritter Ordnung liefern im dreidimensionalen Raum bekannte und einfache Beispiele. Aber erst bei mehr als drei Dimensionen kommt die ganze Vielseitigkeit des Begriffes zur vollen Auswirkung; und, um sie beherrschen und ordnen zu können, bedarf es einer umfassenden Symbolik, deren Gesetze nebst den grundlegenden Begriffen der höherdimensionalen Geometrie der Gegenstand des ersten Kapitels sind. Die Notwendigkeit dieser Symbolik schließt die Unmöglichkeit in sich, in einem kurzen Bericht den Gang der Entwicklung zu schildern und Einzelheiten herauszuheben. Es kann nur darauf hingewiesen werden, daß zunächst im n-dimensionalen Raum schöne Eigenschaften der Mannigfaltigkeiten abgeleitet werden, deren definierende Matrix von allgemeiner Gestalt ist, daß hernach auch die Fälle behandelt werden, denen eine symmetrische oder schiefsymmetrische Determinante zugrunde liegt und daß den Abschluß Teilgebiete der Theorie bilden, die insbesondere den Raum von vier Dimensionen umfassen.

Dresden. W. Ludwig. 932

W. M. **SMART**, M. A., D. Sc., Regius Professor of Astronomy in the University of Glasgow, Stellar Dynamics. VIII + 434 S. Cambridge 1938, The University Press. Preis 30 Schilling.

Das vorliegende Buch von Smart enthält einen recht vollständigen Bericht über die während der letzten vier Jahrzehnte entstandenen Arbeiten zur Dynamik von Sternsystemen. Die ersten Kapitel behandeln die klassischen Arbeiten von Kapteyn und Schwarzschild zur Erklärung der in der unmittelbaren Umgebung der Sonne beobachteten Bewegungsverhältnisse der Sterne, nämlich die Zweistromtheorie von Kapteyn und die ellipsoidische Geschwindigkeitsverteilung von Schwarzschild. Die weiteren Kapitel befassen sich mit allgemeinen Theoremen der Stellarstatistik, wie sie vor allem von Seeliger, Kapteyn und Schwarzschild entwickelt wurden, mit Untersuchungen des inneren Aufbaues von Sternhaufen und mit der Dynamik von Sternsystemen. Es werden hier vor allem die Untersuchungen von v. Zeipel, Eddington und Jeans behandelt. Die zwei letzten Kapitel des Buches enthalten die aktuelleren Fragen nach der Rotation der Milchstraße und der Dynamik des galaktischen Systems.

Das Buch ist vorwiegend mathematisch orientiert, so daß der Mathematiker manche Anregung darin finden wird, während der Astronom gelegentlich einen engeren Anschluß an die Beobachtungsdaten vermißt. Der Stoff des Buches ist weitgehend historisch geordnet, was nicht immer vom sachlichen und pädagogischen Standpunkt aus gerechtfertigt erscheint. Der Student, der in das Gebiet der Dynamik von Sternsystemen eindringen will, wird in dem Buch von Smart zahlreiche spezielle Probleme mathematisch behandelt finden; er wird aber zu wenig darauf hingewiesen, wie weit man die mathematische Auswertung vorliegender Beobachtungen treiben darf.

Potsdam. P. ten Bruggencate 985

KARL **MARBE**, Das Ausgleichsprinzip in der Statistik und verwandte Probleme. V + 164 S. München 1938, C. H. Becksche Verlagsbuchhandlung. Preis brosch. 8 M.

Der Würzburger Philosoph Karl Marbe vertritt seit nunmehr 40 Jahren eine Theorie des „statistischen Ausgleichs“ bei Massenerscheinungen. Sie besagt u. a., daß sehr seltene Ereignisse, wie etwa eine lange Serie von aufeinanderfolgenden Eintragungen von Knabengeburten (Iteration) im Geburtenregister, noch seltener einzutreten pflegen, als es nach den Formeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu erwarten ist. Diese Theorie fand viel Interesse und gab Anlaß zu einer umfangreichen Literatur; allerdings erfuhren Marbes Ausführungen von Mathematikern, in neuerer Zeit von v. Mises und Kamke, eine entschiedene Ablehnung.

Nachdem ein 1934 erschienenes Buch (Grundfragen der angewandten Wahrscheinlichkeitsrechnung und theoretischen Statistik; vgl. die Besprechung ZAMM **15**, 1935, S. 306) umfangreiche Erhebungen über Geburteneintragungen auf Standesämtern brachte, wird in dem vorliegenden neuen Werk dieses teils alte Material nach neuen Gesichtspunkten behandelt, teils neues Material vorgelegt. Es beginnt mit einer empirischen Theorie des statistischen Ausgleichs und bringt sodann den Nachweis der zeitlichen Veränderlichkeit des Geschlechtsverhältnisses der Neugeborenen. Die befolgte „Methode der absoluten Differenzen“ ist allerdings wohl wenig zweckmäßig.

Marbes Theorie ist manchmal so mißverstanden worden, als versuche er, auf empirischem Wege die Richtigkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu prüfen. Demgegenüber wird hier erneut betont, daß die Untersuchungen nur bezwecken festzustellen, ob gewisse mathematische Voraussetzungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, z. B. die der Unabhängigkeit der Ereignisse, in der Erfahrung erfüllt sind. Hier wird allerdings übersehen, daß auch abhängige Ereignisse einer wahrscheinlichkeitstheoretischen Behandlung sehr wohl zugänglich sind.

So zeigt eine Aufstellung der relativen Häufigkeiten von „schwarz“ bei 502 940 Rouletteergebnissen in Baden-Baden ein langsames Schwanken, bei dem die ersten drei Dezimalstellen festbleiben, das mit Recht auf gelegentliche Neueinstellung der Roulette zurückgeführt wird. Man kann aber auf Grund dieser Tatsache nicht — wie Verf. es tut — schließen, daß keine Konvergenz stattfindet und daraufhin die Definition der Wahrscheinlichkeit als Grenzwert der relativen Häufigkeit ablehnen.

Die Hauptstütze seiner Behauptungen sieht nun der Verf. darin, daß die beobachteten Anzahlen der Iterationen in seinem Material von Geburteneintragungen und Rouletteergebnissen hinter dem erwartungsmäßigen zurückbleiben. Der Hinweis der genannten mathematischen Kritiker, daß die beobachteten Zahlen fast durchweg innerhalb der wahrscheinlichen Grenzen liegen und daß wegen der Unsymmetrie der Verteilung eine Unterschreitung des Mittelwerts wahrscheinlicher ist als eine Überschreitung, daß ferner für gewisse Schlüsse hinsichtlich seltener Ereignisse das Material immer noch nicht umfangreich genug ist, bleibt als durchaus berechtigt bestehen.

Wie seine früheren Veröffentlichungen ist auch dieses Werk des Verf. sehr anregend geschrieben; es enthält viele interessante kritische Bemerkungen zu den Grundfragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, über Spielsysteme und verwandte Fragen. Wenn auch der Mathematiker nicht allen Schlußfolgerungen zustimmen kann, wird er dem Verf. für seine überaus mühevolle und sorgfältige Zusammenstellung statistischen Materials Dank wissen.

Berlin. Günther Schulz 984

NACHRICHTEN

Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik.

Vorläufige Vortragsfolge der wissenschaftlichen Tagung in Marienbad.

Freitag, den 22. September 1939.

K. Federhofer, Graz: Über die Stabilität der Katenoidschale.

K. Federhofer, Graz: Querschwingungen des Kreisbogenträgers mit I-Querschnitt.

E. Weinel, Jena: Torsionsbeulung eines Plattenstreifens.

K. Klotter, Adlershof: Über die Bewegungen des Pendels mit oszillierendem Aufhängepunkt.

C. Weber, Dresden: Halbebene mit Randkerben.

H. Neuber, Braunschweig: Über das Kerbproblem in der Plattentheorie.

M. Schilhansl, Heidenheim: Kreisplatte mit Radialrippen.

R. Grammel, Stuttgart: Ein Gegenstück zum Meißnerschen Verfahren der graphischen Analysis.

P. Lorenz, Berlin: Ist die Versicherungsmathematik Wissenschaft oder nur Routine?

H. Fromm, Danzig: Bruchbedingung zäher Flüssigkeiten.

Sonnabend, den 23. September 1939.

J. Ginzel, Göttingen: Theorie des Flügels mit Spalt (Beitrag zur konformen Abbildung mehrfach zusammenhängender Bereiche.

F. Vandrey, Göttingen: Theorie des Tragflügels in schwach inhomogener Grundströmung.

W. Tollmien, Dresden: Zur Theorie der Windkanalturbulenz.

F. Weinig, Möhringen: Einfluß der Reibung beim Element einer Vortriebsschraube.

M. Mangler, Göttingen: Ein Nomogramm zur Integration der Polhausenschen Differentialgleichung für die Dicke der Reibungsschicht.

W. Richter, Aussig: Verwendung nomographischer Hilfsmittel zur Untersuchung der Längsbewegung eines Flugzeuges, wenn der Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Bahntangente der Flugbahn oder der zeitliche Verlauf des Höhensteuerwinkels vorgegeben ist.
986

Neu berechnete Tafeln.

Hj. **TALLQVIST** gibt in den Acta soc. sc. Fenn., A II, die Werte von Kugelfunktionen mit sechs Dezimalen, nämlich

a) in Nr. 4 (1937),
[3 + 2 × 20 Seiten] : $P_1(x)$ bis $P_{16}(x)$ für $x = 0{,}001 \ldots 0{,}999$.

b) in Nr. 11 (1938),
[7 + 4 × 9 Seiten] : $P_1(\cos\vartheta)$ bis $P_{32}(\cos\vartheta)$ für $\vartheta = 0^0\,10'$; $0^0\,20'$; ... $89^0\,50'$; $90^0\,0'$.

Mit Differenzen sind die Tafeln nicht versehen. Gegenüber den früher veröffentlichten Tafeln haben die neuen Tafeln unter a) einen 10mal, die unter b) einen 6mal so kleinen Schritt.

GEORGES **PREVOST,** Tables des fonctions sphériques et de leurs intégrales pour calculer les coefficients du développement en série de polynomes de Laplace d'une fonction de deux variables indépendantes. (Bordeaux u. Paris 1933 bei Gauthier-Villars.) 95 + VII (Text) + 134 (Tafeln) + 22 (Formeln) Seiten 4⁰. Preis etwa 14 M.

enthält

a) die Werte der Legendreschen Polynome und ihrer „zugeordneten" $P_n^m(x)$, sowie der Integrale $\int_0^x P_n^m(\mu)\,d\mu$ mit 5 bis 7 geltenden Stellen für $x = 0{,}01 \ldots 1{,}00$ bei $n = 0, 1, 2, \ldots 8$ und $m = 0, 1, 2, \ldots n$.

b) Nullstellen dieser Funktionen mit 4 geltenden Stellen (Dezimalen).

c) die Werte von $\sin n\alpha$, $\int_0^\alpha \sin n\varphi\, d\varphi$, $\cos n\alpha$, $\int_0^\alpha \cos n\varphi\, d\varphi$ mit 5 Dezimalen für $\alpha = 1^0, 2^0, \ldots 90^0$ bei $n = 0, 1, 2, \ldots 8$.

Die ersten Differenzen sind angegeben. Mit linearer Interpolation wird die Genauigkeit der Tafelwerte nicht erreicht. Die zweiten Differenzen gehen stellenweise bis in die Tausende.

Fritz Emde. 987

Persönliches.

Der o. Prof. für Darstellende Geometrie a. d. Techn. Hochschule Dresden, Dr. W. Ludwig, tritt am 1. Oktober 1939 in den Ruhestand.

Anläßlich der Vollendung seines siebzigsten Lebensjahres wurde dem Ministerialdirektor a. D. Prof. Dr. Th. Vahlen die Goethe-Medaille für Kunst und Wissenschaft verliehen.

Der b. a. o. Prof. der Darstellenden Geometrie a. d. Techn. Hochschule Danzig, Dr. U. Graf, wurde zum o. Prof. ernannt.

Verstorben sind der o. Prof. der Techn. Mechanik und Baukonstruktionslehre an der Bergakademie Freiberg (Sa.) Dr.-Ing. F. Kögler, der ehemalige o. Prof. d. Mathematik a. d. Universität München Geh. Rat Dr. F. Lindemann, der ehemalige o. Prof. der Darstellenden Geometrie a. d. Techn. Hochschule Darmstadt Geh. Hofrat Dr. R. Müller, der ehemalige o. Prof. der Mathematik a. d. Techn. Hochschule Darmstadt Dr. H. Wiener.

ZUSCHRIFTEN AN DEN HERAUSGEBER

H. Heinrich: **Drei Filme über konforme Abbildung.** Z. angew. Math. Mech. Bd. 18 (1938), S. 366.

Die AEG teilt mit, daß sie bereits im Jahre 1934 einen Film „$W = e^z$ (Konforme Abbildung)" hergestellt hat.

Herr Dr. Heinrich, Breslau, bemerkt dazu, daß im Vortrag selbst erwähnt worden ist, daß außer den vorgeführten drei Filmen noch vier andere mathematische Filme von der Reichsstelle für den Unterrichtsfilm veröffentlicht worden sind und daß dort auch darauf hingewiesen ist, daß die AEG im Jahre 1934 einen Normalfilm „$W = e^z$ (Konforme Abbildung)" hergestellt hat (vgl. Z. angew. Math. Mech., Bd. 3 [1923], Heft 2). In dem Auszug wurde der Hauptwert auf die Darstellung des vereinfachten Aufnahmeverfahrens gelegt, das bei den vorgeführten drei Filmen zum erstenmal angewendet worden ist.
988

Für den Textteil verantwortlich: Professor Dr. Fr. A. Willers, Dresden-A. 20, Dorotheenstr. 12. — Printed in Germany. —

— Druck von A. W. Zickfeldt, Osterwieck am Harz.

A. Bezugsbedingungen: Die „Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik" erscheint jeden zweiten Monat (Februar, April, Juni usw.)

Die Bezugszeit ist halbjährig (Ausland ganzjährig).

Der Bezugspreis beträgt $1/2$jährlich **15.— RM.**; ganzjährig **30.— RM.**
für Mitglieder „ **13.50 RM.**; „ **27.— RM.**

Bestellung kann bei jeder Buchhandlung oder beim Verlag aufgegeben werden.

Abbestellung ist nur am Schluß eines Halbjahres bezw. Jahres zulässig. Nicht befristete Bestellungen laufen von Halbjahr zu Halbjahr weiter (Ausland von Jahr zu Jahr).

Bezugsgebühren sind stets zu Beginn eines neuen Halbjahres oder Jahres fällig und werden bei Ausbleiben der Zahlung durch Nachnahme eingezogen.

Lieferung unter Streifband.

Einzelheftpreis: 6.— RM., für Mitglieder 5.40 RM. zuzüglich 15 Rpf. Postgeld.

VDI-Literaturkartei: Auf Wunsch erhalten unsere Bezieher unberechnet Karteikarten über den Inhalt sämtlicher Zeitschriften des VDI in monatlichen Zusammenstellungen gegen Erstattung der jährlichen Versandkosten von 1.— RM.

ZUR BEACHTUNG

Lieferstörungen werden am schnellsten beseitigt, wenn das Ausbleiben der Zeitschrift umgehend mitgeteilt wird.

Um- und Abbestellungen sind zweckmäßig stets dorthin zu richten, wo die Bestellung aufgegeben wurde.

Bei Zuschriften und Zahlungen wird um genaue Angabe der vollständigen Anschrift und des Verwendungszweckes gebeten, da nur dadurch Verwechslungen und Lieferstörungen vermieden werden.

B. Anzeigenpreise Satzspiegel der $1/1$ Seite 171/250 mm.
$1/1$ Seite 160.— RM., $1/2$, $1/4$, $1/8$, $1/16$ Seite anteilig.

Nachlaß: bei 3maliger Aufnahme im Jahr 3 vH, bei 6maliger Aufnahme im Jahr 5 vH.

Aufschläge für Vorzugsplätze nach vorheriger Vereinbarung laut Tarif. Erfüllungsort für beide Teile Berlin-Mitte.

VDI-VERLAG G. M. B. H., BERLIN NW 7, DOROTHEENSTR. 40

Fernsprecher: Sammel-Nr. 116171. Postscheckkonto: Berlin 102373, Wien 174439, Prag 77329, Budapest 59951, Warschau 194372. Bankverbindungen: Dresdner Bank, Depositen-Kasse 65, Berlin C 2, Wallstr. 5 bis 8. — Deutsche Bank, Stadtzentrale Abt. A, Berlin W 8, Mauerstraße 26/27. Drahtanschrift: Ingenieurverlag. Geschäftszeit: Montag bis Freitag 8 bis 16^{30} Uhr, Sonnabend 8 bis 12^{30} Uhr.